UNIVERSIDAD NACIONAL MAYOR DE SAN MARCOS

FACULTAD DE LETRAS Y CIENCIAS HUMANAS

UNIDAD DE POSGRADO

Sobre los fundamentos de los juicios sintéticos a priori de la aritmética de Kant

TESIS

Para optar el grado de Magíster en Filosofía con mención en Epistemología

AUTOR

Jorge Enrique Sarango Zarate

Lima – Perú

2015

Pour la princesse Lucie Masse

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Que Kant es el filósofo alemán más importante de todos los tiempos y el que, por ello, ha tenido mucha influencia en el filosofar, es una convicción netamente académica que, con el paso de los años, ha determinado inmiscuirnos en las lecturas del referido filósofo por el interés contemporáneo que estas mismas generan. Y entre lo que encontramos, a través del tiempo, hubo halagos y críticas. En cuanto a lo último, una de las críticas más comunes en los ambientes académicos es la problemática que se aduce en la existencia de juicios sintéticos a priori en la aritmética. Tal vez muchos hayan puesto su granito de arena desde distintos puntos de vista, pero nadie se ha tomado el trabajo de revisar la historia de la aritmética y ver la forma en la que el hombre empezó y fue relacionándose con los números. He ahí la importancia de la presente tesis, que lleva como título: *Sobre los fundamentos de los juicios sintéticos a priori de la aritmética de Kant.*

La presente tesis realiza una reconstrucción de la filosofía de la aritmética de Kant. La hipótesis que tenemos es que los conceptos manejados por este autor son perfectamente válidos porque encajan en la historia de la aritmética desde la aparición de los números naturales hasta los números irracionales (números con los que trabajó Kant).

A nuestros modo de ver, los números tuvieron una aparición trascendental el día en el que el primer hombre vio un objeto, más aún varios, y necesitó contabilizarlos. Empezó, entonces, a hacer una marca en un lugar para cada objeto. Esto fue con el fin de tener con exactitud la cantidad de dichos objetos de su propiedad, ¿pero es posible sostener esto? La respuesta es afirmativa porque es así como surge la numeración y la forma de contar. Una huella, un trazo y, después, un número estaban en concordancia con los objetos que yacen en la realidad, pero esta explicación no es propia de la filosofía, sino de la historia de la aritmética. No obstante, es la misma filosofía que nos remite al sujeto quien, mediante sus sentidos, da cuenta de ello y, mediante su razón, reflexiona sobre ello. Además da la seguridad a futuro de la operación matemática como lo es la suma. En consecuencia, lo propio de la filosofía es la reflexión de los principios que, a partir de los cuales, se recoge en la historia la aparición, además de los números, de las operaciones, entre ellas la suma. Así bien, damos cuenta que la aparición de la suma es de carácter experiencial. Sin embargo, al mismo tiempo, es reflexiva, intuitiva y naturalmente lógica, así se remarca en la propia mente humana. Por ello, es que podemos realizar sumas mayores. Podemos hablar de nuevos números como son los enteros negativos (-3; -4; etc.), los racionales (3/4; 1/2; etc.) y hasta los números irracionales (√2; etc.).

Por lo expuesto antes, y por la naturaleza del tema, hemos empleado como metodología de investigación la exégesis de los textos clásicos kantianos y los de la historia de la aritmética. Para esto, nos apoyamos en las interpretaciones de prestigiosos tratadistas cuyos trabajos consignamos en la bibliografía. Nuestra metodología de exposición combina el análisis de los argumentos. Por lo cual, el método empleado será el analítico demostrativo al modo exegético, ya que, a través de esta herramienta, se puede traer a la luz los supuestos reales de los conceptos que fluctúan como sustrato básico, que moran en el trasfondo de los textos kantianos, y que además se enrolan con la historia de la aritmética.

Ante lo señalado, se presenta un resumen de los tres capítulos que componen esta tesis. En el primer capítulo, veremos lo que significa "trascendental" en Kant, que es aquello que el sujeto define del objeto en el mismo acto que conoce al objeto. Así bien, el sujeto, mediante sus gafas teóricas, solo coloca en el objeto algo que él ve y no lo que realmente el objeto es. Este es el denominado giro copernicano kantiano, que nos lleva a señalar el sentido de crítica. Esto último, tiene un matiz limpiador y esclarecedor de la razón, depurando la misma y manteniéndola libre de errores, con lo cual revisa la manera y el derecho con que llega a los conocimientos.

En la segunda parte de este capítulo veremos la distinción del conocimiento puro del empírico, donde el papel de la experiencia es quien permite que la facultad sensible sea motivada y despertada para actuar, lo que permite al entendimiento que cuente con el material para poder ejercer su función. Según Kant, si es cierto que existe un conocimiento que funciona independientemente de la experiencia, entonces, es necesario intentar averiguar qué y cuánto puede conocer el entendimiento y la razón al margen de la misma. Allí está uno de los problemas centrales de la filosofía de Kant, lo que se llama el problema del conocimiento a priori. En Kant, el entendimiento humano tiene la capacidad de formular por sí mismo, al margen de la experiencia, conceptos puros o categorías. A él lo que le interesa analizar primordialmente es el problema del conocimiento absolutamente a priori y no el relativamente a priori.

Después de dicho análisis, veremos cómo a Kant le queda el camino libre para sostener la distinción de los juicios analíticos, juicios sintéticos y juicios sintéticos a priori, de donde de estos últimos se compone la ciencia (matemática y física). No obstante, demostrar las razones que nos puedan explicar el por qué la ciencia formula juicios universales y necesarios, lleva también a explicar las razones que permiten la existencia de sujetos que realizan tales juicios. En otras palabras, la ciencia formula tales juicios, pero, al mismo tiempo, la ciencia es obra del sujeto. Esto explica el hecho de que Kant, a la hora de analizar la posibilidad de los juicios sintéticos a priori en las ciencias, *entremezcle tal análisis con la estructura cognoscente del sujeto*. Ante esto, no queda más que analizar cómo se encuentran estructurados los elementos responsables del conocimiento humano. Por ello, en cuarto lugar, explicaremos la percepción sensorial, que se sostiene en la estética trascendental, donde encontraremos que el sujeto conoce los objetos a través de la intuición empírica y que todo ello que conoce se da dentro del espacio y tiempo, algo propiamente del psiquismo humano. Sentado esto, nuestra misión en el siguiente capítulo será elucidar la existencia de los juicios sintéticos a priori en la aritmética, cómo fue el desarrollo de aquella ciencia. Esto nos permitirá demostrar cuánto de la filosofía de la aritmética de Kant, en cuanto sus conceptos y análisis, son realmente válidos de acuerdo a cómo se dio la misma historia de la aritmética.

En el segundo capítulo, veremos el método de Kant enrolado a descomponer el entendimiento con el objeto de hallar en él sus conceptos puros a priori o categorías.

Así bien, según Kant, el entendimiento utiliza conceptos para realizar juicios, y es mediante estos últimos que el entendimiento conoce el objeto de forma mediata. En otras palabras, el sujeto emite juicios para conocer los objetos. Por ello, Kant sostiene que pensar es también la forma como el sujeto conoce *y hace el conocimiento*. Y es que el sujeto conoce mediante juicios, y mediante ello es la manera que este le da una ubicación a los objetos. A su vez, esta es la manera mediata de representación que el sujeto tiene para con los objetos. Se dice mediata porque el sujeto no conocería de manera directa al objeto. Mediante conceptos se describe al objeto, pero no de manera directa, porque de manera directa es como se hace con la intuición sensible, que sí es inmediata, porque capta el objeto que nos es dado. No obstante, el entendimiento conoce de forma inmediata a los objetos, por las razones primero señaladas líneas arriba, como la emisión de juicios.

Así, procede la forma de los juicios sintéticos a priori en la aritmética. El sujeto cuando aprende a sumar, lo que emite son juicios universales que se enlazan con un carácter de totalidad (una de las categorías kantianas). Esto es un conocimiento que se puede mencionar y que se cumple en cualquier lugar.

Para Kant, los juicios en la aritmética son producto de la existencia de la denominada cantidad extensiva. Son representación de las partes que hace posible la representación del todo. Son la representación de las unidades que hace posible la estructuración del hallazgo de la totalidad de sumandos. Esto es lo que Kant encuentra para denominar a tal proceder como axiomas de la intuición. Según Kant, estos no serían más que principios que posee nuestra intuición para el proceder de la suma, donde dichas sumas no son axiomas sino solo fórmulas numéricas.

Para Kant, gracias a la intuición, vemos la sucesión del contar, que se produce en el tiempo, ya que es el sujeto que se hace consciente de que una cosa va antes y otra va después. Así, por ejemplo, para llegar a 5, tenemos que pasar por 1; 2; 3; 4. De otro lado, es el sujeto que también se hace consciente que, para llegar a un número determinado como producto de la suma, ciertamente es indiferente qué número esté antes o después, ya que entre dos números, puestos en el orden que fuere, arrojará el mismo resultado.

Vistos estos puntos, analizaremos dos cartas importantes de Kant. La primera dirigida a Schultz; y la segunda, a Rehberg. En la carta a Schultz, veremos que Kant piensa en la construcción de cifras en la aritmética, donde dicha parte de la matemática posee postulados, juicios prácticos, que son inmediatamente ciertos, producto de la intuición que hacemos al realizar el acto de sumar. Así bien, si sumamos, ya sea unidades o cifras, la segunda que pongamos será la continuidad de la primera.

Sentado esto llegaremos a ver que Kant concibe la idea piramidal de la aritmética. Así lo percibimos en la carta a Rehberg, ya que la suma es el primer registro de la aritmética que se halla en la historia de la humanidad, y la primera operación que todo ser humano aprende. Sin ella no se pude arribar a otras partes más complicadas de la aritmética. Así bien, la suma permite acceder a otras operaciones, a otras complejidades de la aritmética. Sentado esto, se cumple lo siguiente: todo conocimiento parte de la experiencia, pero no todo conocimiento se hace solo con la misma, porque hay que hacer demostraciones formales con las operaciones distintas a la suma. Sin embargo, por más que sean formales, no implica que se deje el lado empírico del aprender de dicha operación suma.

Así bien, dicha operación es como producto de la mezcla de los sentidos y la razón para conseguir el aprendizaje de dicha operación. Por ejemplo, cuando aprendemos a sumar no nos dicen 2+2=4. Si nos dicen eso, nunca más vamos a querer aprender a sumar. Por el contrario, sucede en ese instante que nos dicen que dos objetos, por uno y otro lado reunidos, conforman cuatro. Así bien, son nuestros sentidos quienes se percatan de ello, propiamente la vista, pero es nuestra mente la que almacenó dicha información. Y como la mente de todo ser humano no es pasiva sino activa, podemos, a raíz de dicho aprendizaje, proceder a desenvolvernos con cifras mayores, y hasta con números más allá de los naturales.

Una vez sentado el análisis y determinado en qué sentido Kant sostiene la existencia de juicios sintéticos a priori en la aritmética y cómo se encuentran enrolados estos con la misma historia de la aritmética, pasamos a analizar cuatro autores, donde nuestra intención no es hacer un ensayo de los mismos, sino relacionar a las bases sentadas en el capítulo II. Veremos, hasta donde es posible fiarse de las interpretaciones sobre los juicios sintéticos a priori en la aritmética en Kant, qué es lo que hay y no hay en tales interpretaciones. Cabe señalar que dicha revisión es con respecto a los últimos 13 años.

Así bien, empezaremos analizando a Robert Hanna con su trabajo titulado *Mathematics for Humans: Kant's Philosophy of arithmetic revisited* (*Matemáticas para humanos: Revisión de la filosofía de la aritmética de Kant*). Aquí veremos que no distingue entre los inicios de la matemática y su estructura piramidal de la misma. Además veremos que los conceptos matemáticos son como creaciones propias del ser humano. Pero, si esto es de tal forma, veremos que traza una innecesaria división entre una cognición específicamente matemática en distinción de una cognición arbitraria (consensual) de la misma. En esto que cae Hanna es producto de no tomar en cuenta la referencia de la generación de conceptos. Esto se encuentra en Kant en la forma cómo expone los juicios sintéticos a priori en la aritmética; más precisamente, en el hecho de cómo el sujeto trazó con el paso del tiempo el camino de las operaciones en la aritmética, partiendo de la operación básica suma. Ahora bien, dentro de los juicios en esta operación, se halla la conceptualización. La cuestión responde a que, cuando el sujeto aprende, empieza a definir y conceptualizar los saberes mediante juicios. Ante lo cual, estos son los lineamientos que no se toman en cuenta sobre la generación de conceptos en matemática.

Por último, y no menos importante, Hanna no toma en cuenta y asume la imaginación pura, a secas, sin tener en cuenta sus aspectos de la misma. Esto es muy importante, ya que, construir un concepto como el numérico, consiste en que la imaginación productiva (imaginación trascendental) y no pura, como lo llama Hanna, se desprenda del mismo aspecto sintético productivo. ¿Cómo se da esto? Esto es producto de haber conocido un saber, en este caso la suma de números. Puesto que, de esto, el sujeto puede ir más allá de tal saber. Finalmente, si algo tenemos que resaltar a favor de Hanna, es el reconocer que la aritmética para Kant no es solo una ciencia exacta, sino también, fundamentalmente, una ciencia humana.

En la segunda parte de este capítulo analizaremos dos tópicos de Daniel Sutherland de su trabajo *Kant on arithmetic, algebra, and the theory of proportions* (*Kant sobre la aritmética, el álgebra y la teoría de las proporciones*). El primero es *Kant sobre la cognición matemática de proposiciones aritméticas*; y, el segundo, *La aritmética y el número en Kant*.

Sobre el primero, veremos que Sutherland no toma en cuenta la formulación de un juicio universal, en estrecha relación con la categoría de totalidad de cantidad. Así bien, el total de veces que mencionemos 7 + 5 = 12 será, en principio, un *juicio* universal en cualquier lugar por la *totalidad* de veces que ello siempre arroje la misma cantidad.

El segundo tópico lo dividiremos en tres puntos: el primero es que, según Sutherland, Kant no explica la cognición de números y, a ello se le suma un segundo punto, la tradición aritmética. Sutherland no llega a discernir por qué Kant le da más preferencia a los números enteros (naturales), como él mismo le llama, o esta posición más griega que moderna. A nuestro modo de ver, el punto está en que se debe tomar en cuenta que la operación más elemental de todas las operaciones aritméticas es la suma, que está antes de cualquier otra operación matemática, antes de la suma de fracciones, por lo cual, estas y otras operaciones recaen y se basan bajo los conocimientos de la primera, la suma.

El tercer problema es el que concierne a la homogeneidad, Sutherland afirma que Kant es reacio a los números irracionales. Dicha cuestión no es cierta. Kant solo sostiene que se derivan de una forma "singular", y que no son de carácter natural pues digamos que el hombre no aprende a sumar con ellos, sino que en el desarrollo de los números se encuentra con ellos. Por lo cual, esa es la razón que los números irracionales como √2 no son un concepto vacío.

En tercer lugar, veremos a dos filósofos Kristina Engelhard y Peter Mittelstaedt con un trabajo mancomunado *Kant's theory of arithmetic: A constructive approach?* (*La teoría de la aritmética de Kant: ¿un enfoque constructivo?*). Analizaremos dos tópicos. El primero es que los juicios en la aritmética son sintéticos a priori al modo de Kant y el segundo es que la intuición es el elemento a partir del cual se procede en la construcción de la aritmética.

Así bien, empezando el primer punto, los autores sostuvieron que la tesis predominante de la teoría de las matemáticas de Kant es su afirmación de que todos los juicios matemáticos son a priori y que la mayoría de ellos son sintéticos. Nuestra observación va en el siguiente sentido: si Kant hizo la distinción de dos tipos de juicios, juicio analítico y juicio sintético, era para dar esclarecimiento a la distinción que había en su época, las verdades de razón y las verdades de hecho de Leibniz. Sin embargo, el mismo Kant sostuvo juicios sintéticos a priori y además que dichos juicios son verdaderos, y que en ellos se filtra la raíz común: los sentidos y la razón.

¿Cómo aclaramos todo esto? Es el caso que, cuando señalamos el signo '=', ocurre que tiene que saberse lo que dichos "trazos" significan. Por ejemplo, que es una equivalencia, que ello señala igualdad a ambos lados, y por ende se identifica a lo mismo. No obstante, si nos damos cuenta, es una construcción, que a su vez se habría descubierto. Dicho conocimiento se hace a través de una construcción del mismo, no se parte sin nada, sino sabiendo lo que es en este caso '='. Lo mismo sucedería cuando un matemático afirmaría '(a + b) > a'. Sabe lo que ello representa, siempre y cuando sabe lo que representa cada una de las letras y también los símbolos como es el caso de '+' '>'. Si sabe lo que la expresión denota, entonces, sabe lo que dicha expresión quiere decir o significa. Esto surge con conocimientos previos. ¿En qué sentido? Es nuestra mente que se da cuenta del proceder para elaborar dichas fórmulas. Así bien, decimos por ello que Kant concluye sosteniendo que, si bien el predicado se halla necesariamente ligado al sujeto, no lo está en cuanto pensado en este último, sino gracias a una intuición que ha de añadirse al concepto.

En la cuarta parte de este capítulo analizaremos *¿es 7 + 5 = 12 un juicio sintético? Examen de las razones de Kant (y de Schultz)* un trabajo perteneciente a Rogelio Rovira. Nuestra exposición la dividiremos en tres partes. La primera tratará sobre el signo '+', que equivale a la conjunción copulativa 'y'. Para nosotros, en contraposición de Rovira, la suma vale tanto como mera "reunión" (*Vereinigung*) o "composición" (*Zusammensetzung*) de dos números. Al mismo tiempo, el signo '+' representa la operación aritmética de la suma. Es decir, la “adición” (*addition*) de los números, ¿por qué se da? Porque la adición vendría a ser el total de la composición o la reunión de dos números o más. Así bien, no podemos desligar la composición y reunión de la adición como lo hace Rovira.

De otro lado, sea el caso de 7 + 5 = 12; 24 : 2 = 12; 3 * 4 = 12 y 17 - 5 = 12, no podemos mezclar ello como lo hace Rovira, porque todas las operaciones antes señaladas, pese a arrojar el mismo resultado, no se les puede equiparar. Nunca se aprende primero a dividir, a multiplicar o a restar. Lo que se aprende primero es a sumar, y con números pequeños, para luego proceder con números grandes. Por lo cual, una de las cosas que conlleva hablar del número es que es el resultado de otras operaciones aritméticas, en tanto y en cuanto se tenga en cuenta el proceder y el orden de aprendizaje de las diferentes operaciones aritméticas.

La segunda parte la cual analizaremos, es un tanto desconcertante, ya que se ataca el juicio kantiano por una cuestión de tipo semántica. Si vamos más allá de este asunto, cuando Kant piensa en que “7 + 5 = 12” no es un juicio sintético y tampoco un juicio analítico, y dice que ello es un juicio sintético a priori, ante todo, hay que tomar en cuenta que para él lo que interactúa en el aprender humano es la razón y los sentidos, y este tipo de operaciones aritméticas no escapa de ello. Ante lo cual, decir “es” representa un “nos da” o “tenemos”.

Primero, la universalidad y necesidad características del juicio analítico se proyecta en la suma, debido a que se cumple siempre en cualquier parte dicho resultado. Segundo, el juicio es extensivo porque el resultado de la suma nos dice algo más de lo que nos dice los dos números sumados (aunque cabe la posibilidad de que sean tres o más números sumados). Tercero, que Kant se refiera al 7, al 5 y al 12 algunas veces como conceptos, representaciones y otras veces como números, señalar como si se mezclara ello en vez de analizar lo que hay en ello, nos parece un poco injusto por parte del examinador Rovira. Si pensamos o hablamos de un número, hablamos de una representación de objeto concreto o abstracto. Y si lo vemos como tal, es una conceptualización. Así bien, cuando hablamos de número, proyectamos una representación en él. Y al hacerlo, trae como resultado precisamente el trabajar con un concepto.

Por último, Rovira plantea tres problemas en Kant: ¿Qué es propiamente sumar?, ¿en qué consiste la igualdad numérica? y ¿qué es el número? Las preguntas son interesantes, pero salen del enfoque kantiano. El saber con plenitud lo que es un número implica llegar a conocer el noúmeno, pero en la filosofía de Kant solo se conoce el fenómeno, es decir, las apariencias. La suma en nuestra vida cotidiana y en la matemática clásica seguirá siendo la misma. 7 + 5, la suma, adición o reunión de ello seguirá siendo 12. Por su parte, la igualdad seguirá asumiéndose como la equiparidad entre dos cantidades de números u otras. Pero lo más importante es que las operaciones aritméticas son construcciones por parte del sujeto, construcciones y, al mismo, tiempo descubrimiento, producto de la forma del conocer mismo. Si no fuese de ese modo no tendríamos ni hubiéramos tenido la posibilidad del desarrollo de las operaciones aritméticas.

De lo expuesto, tenemos que remarcar lo siguiente los autores en mención no distinguen por qué Kant le da más preferencia a los números naturales en su análisis, y a la primera operación aritmética, la suma. Varias de sus ideas de estos autores circundan bajo los conceptos de Kant, algunos con mucha precisión, pero sin tomar en cuenta la misma historia de la aritmética. Nosotros vamos a sostener los alcances y límites de sus posiciones frente a la filosofía de la aritmética de Kant, todo esto con el ánimo de hacer un balance actual de lo que se dice de tal filosofía. Por lo cual, nuestra intención es sentar las bases en nuestros primeros capítulos sobre la filosofía de la aritmética de Kant y luego tener el camino libre para dar acuse de los examinadores de la filosofía de la aritmética de Kant. No obstante, lo más importante de dicho balance en relación a los examinadores será tener en claro dos cosas. Una, en la aritmética es legítimo afirmar la existencia de juicios sintéticos a priori como lo hace Kant. Dos, no es una mera construcción como sostienen varios de estos autores, sino que es una *construcción* bajo *descubrimiento*, que a su vez conlleva a afirmar que los números se descubren con la necesidad, y que es el sujeto que con sus sentidos y su razón da cuenta de dicho conocimiento, clasificándolo, y, a partir de allí, construyendo dicho saber. Así bien, llegaremos a dar cuenta de lo problemático que es el no tomar los inicios de la aritmética, los cuales cuadran perfectamente con la conceptualización de la propia filosofía trascendental.

Por último, cabe hacer una aclaración con respecto a las traducciones realizadas a lo largo de la presente tesis. Como se trata de un tópico de la filosofía de Kant que incluye estudios actuales, el material empleado que aborda el tema de esta tesis está mayormente en inglés. El contenido en español es escaso o desactualizado, motivo por el cual se podrá apreciar que la bibliografía empleada en gran parte es reciente y está en idioma inglés. Sin embargo, la mayor parte de este material no ha sido traducido nunca y posiblemente tome un buen tiempo en ser traducida, pero hasta entonces será algo desactualizado.

Es por ello que nos hemos encargado de hacer una traducción de las citas, que corresponderían al material en idioma extranjero, poniendo a pie de página el texto original sin traducir. En otras palabras, en el cuerpo de la tesis se verá la traducción al español hecha por quien realiza la investigación y abajo, en pie de página, la aclaración del original en inglés. Es oportuno hacer esta aclaración para dejar en claro que no se trata de traducciones ya publicadas en otros lugares, sino de traducciones al español, en su mayoría, inéditas para el conocimiento académico hispanohablante.

CAPÍTULO I

Sobre los presupuestos básicos de la filosofía trascendental

Los lineamientos de la filosofía trascendental se encuentran enmarcados en comprender los presupuestos básicos que se sitúan en el prólogo a la segunda edición como en la introducción de la *Crítica de la razón pura*. Ambas partes, junto a los *Prolegómenos a toda metafísica que haya de poder presentarse como ciencia,* terminan siendo las bases para comprender la filosofía kantiana en cuanto a su matiz epistemológico.

Ahora bien, la epistemología en Kant se encuentra íntimamente relacionada con la teoría del conocimiento. Por ello, en este primer capítulo veremos, en primer lugar, los rasgos de la filosofía trascendental, la génesis de esta, lo que propiamente se denomina el giro copernicano kantiano, lo cual nos deja que el sujeto mediante sus gafas teóricas solo coloca en el objeto "algo que él ve" y no es que el objeto sea de ese modo. De esta forma, para Kant, el nuevo método del pensamiento a saber es que solo conocemos a priori de las cosas lo que nosotros mismos ponemos en ellas. Ello nos lleva a apreciar el concepto que Kant tiene de crítica que finalmente es una "crítica a la razón". Lo cual, tiene un matiz limpiador y esclarecedor de la razón, depurando la misma y manteniéndola libre de errores, con lo cual revisa la manera y el derecho con que llega el sujeto a los conocimientos.

En segundo lugar, veremos la distinción del conocimiento puro del empírico. Así, tenemos que el papel de la experiencia es lo que permite que la facultad sensible sea motivada y despertada para actuar, permitiendo que el entendimiento cuente con el material para poder ejercer su función. Según Kant, si es cierto que existe un conocimiento que funciona independientemente de la experiencia, entonces es necesario intentar averiguar qué y cuánto puede conocer el entendimiento y la razón al margen de la misma. Aquí veremos que uno de los problemas centrales de la filosofía de Kant es lo que se llama el problema del conocimiento a priori, pues, según Kant, el entendimiento humano tiene la capacidad de formular por sí mismo, al margen de la experiencia, conceptos puros o categorías. A Kant le interesa analizar y deslindar el problema del conocimiento absolutamente a priori del relativamente a priori.

En tercer lugar, veremos la distinción de los juicios analíticos, juicios sintéticos y juicios sintéticos a priori, de donde, de estos últimos, se compone la ciencia (matemática y física). Pero demostrar las razones que nos puedan explicar el por qué la ciencia formula juicios universales y necesarios, nos lleva también a explicar las razones que permiten la existencia de sujetos que realizan tales juicios. En otras palabras, la ciencia formula tales juicios, pero, al mismo tiempo, la ciencia es obra del sujeto. Esto explicaría el hecho de que Kant, a la hora de analizar la posibilidad de los juicios sintéticos a priori en las ciencias, *entremezcle tal análisis con la estructura cognoscente del sujeto*. Para ello, no hay más remedio que analizar el cómo se encuentran estructurados los elementos responsables del conocimiento humano. Por ello, en cuarto lugar, veremos la percepción sensorial que se sostiene en la Estética trascendental, Analizaremos conceptos que explican que el sujeto conoce a través de la intuición empírica, que se da sobre una forma pura, perteneciente a una representación que no contiene nada de sensación o materia, y que por ello se denomina intuición pura que se da a priori y que pertenece al psiquismo humano. Todo ello no es más que aquello que se denomina espacio y tiempo.

1. Sobre la filosofía trascendental y el criticismo

En el prólogo de la segunda edición de la *Crítica de la razón pura,* Kant empieza sosteniendo por qué las ciencias han ido avanzando, para encontrar un claro discernimiento en los científicos. Y, sin embargo, en la metafísica las disputas han sido continuas y constantes. En esta explicación kantiana se ve la forma que el hombre ha intentado conocer el mundo, ya que la explicación de las ciencias y de la metafísica tiene que ver en ello. El hombre conoce el objeto el cual capta por medio de la intuición sensible. El hombre conoce lo que él pone a manera de definición en el objeto y no lo que el objeto pone en el hombre. Esto es porque el objeto no se define a sí mismo y le dice al hombre lo que es. Kant ilustra esto con los siguientes ejemplos:

> "El primero que demostró el *triángulo isósceles* (ya se haya llamado *Tales*, o como se quiera) tuvo una iluminación; pues encontró que // no debía guiarse por lo que veía en la figura, ni tampoco por el mero concepto de ella, para aprender, por decirlo así, las propiedades de ella; sino que debía producirlas por medio de aquello que el mismo *a priori* con el pensamiento según conceptos y exhibía (por construcción) [en ella]; y que, para conocer con seguridad algo *a priori*, no debía atribuirle a la cosa nada más que lo que se seguía necesariamente de aquello que él mismo había puesto en ella según su concepto. [...] Cuando *Galileo* hizo rodar por el plano inclinado sus esferas, con un peso que él mismo había elegido; o cuando *Torricelli* hizo que el aire sostuviera un peso que él mismo había pensado de antemano igual al de una columna de agua por él conocida; o [cuando], en tiempos más recientes, *Stahl* transformó metales en cal y ésta // otra vez en metal, quitándoles algo y dándoselo de nuevo,* se encendió una luz para todos los investigadores de la naturaleza. Comprendieron que la razón solo entiende lo que ella misma produce según su propio plan; [...]" (Kant, 2009, BXII-XIII).

Con esta explicación, Kant se jactaba de que había hecho igual que Copérnico:

> "[...] quien, al no poder adelantar bien con la explicación de los movimientos celestes cuando suponía que todas las estrellas giraban en torno del espectador, ensayó si no tendría mejor resultado si hiciera girar al espectador, y dejara, en cambio, en reposo a las estrellas. Ahora bien, en la metafísica se puede // hacer un ensayo semejante, en lo que concierne a la intuición de los objetos. Si la intuición debiese regirse por la naturaleza de los objetos, no entiendo cómo se podría saber *a priori* algo sobre ella; pero si el objeto (como objeto de los sentidos) se rige por la naturaleza de nuestra facultad de intuición, entonces puedo muy bien representarme esa posibilidad" (Ídem, BXVII).

Kant sostiene que es el sujeto quien pone el concepto mediante las categorías y es quien capta el objeto. A esto se le llamó trascendental. Es decir, una cosa es la cosa en sí incognoscible para mí y otra cosa es la cosa para mí cognoscible, y ello solo es lo que yo coloco a los objetos. En otras palabras, el sujeto mediante sus gafas teóricas coloca en el objeto algo que él ve y no es que el objeto sea de ese modo, sino que el sujeto mismo lo ve de dicho modo, debido a la intuición sensible que tiene el sujeto. Conocemos el fenómeno y no el noúmeno producto de la manera de conocer qué posee el sujeto. Por lo cual, "[…] el nuevo método del pensamiento, a saber, [es] que solo conocemos *a priori* de las cosas lo que nosotros mismos ponemos en ellas". (Ídem, BXVIII). Así bien, el texto *Crítica de la razón pura* de Kant tiene como propósito ver cómo el sujeto conoce. Por ello, está el sentido de crítica:

> "La crítica no se opone al *proceder dogmático* de la razón en su conocimiento puro como ciencia (pues, esta debe ser siempre dogmática, es decir, estrictamente demostrativa a partir de principios *a priori* seguros), sino al *dogmatismo*, es decir, a la pretensión de progresar únicamente con un conocimiento puro por conceptos (el [conocimiento] filosófico), de acuerdo con principios como los que la razón tiene un uso desde hace tiempo, sin investigar la manera y el derecho con que ha llegado a ellos". (Ídem, BXXXVI).

Por ello, la "crítica a la razón" tiene un matiz depurador y esclarecedor, como diría también Kant: "[ciencia] tal no se debería llamar *doctrina* [de la razón pura], sino solamente *crítica* de la razón pura, y su utilidad, en lo que respecta a la especulación, sería verdaderamente negativa; serviría, no para el ensanchamiento, sino solo para la depuración de nuestra razón, y la mantendría libre de errores; con lo cual ya se gana muchísimo" (Ídem, B26).

Por lo cual, la *Crítica* tiene que ser tal, en un sentido de utilidad y no un catecismo. Por ello es que encontramos en Kant, a manera de lema, un párrafo del *praefatio* del *Instauratio Magna* de *Baco de Verulamio*. En dicho párrafo, al inicio de la *Crítica*, pensamos que Kant muestra el sentido que realmente debe despegar el texto:

> "Sobre nosotros mismos callamos: Deseamos, en cambio, que la cuestión aquí tratada no sea considerada como mera opinión, sino como una obra, y que se tenga por cierto que no sentamos las bases de alguna secta o de alguna idea ocasional, sino las de la utilidad y dignidad humana. Deseamos, pues, que, en interés propio… se piense en el bien general… y se participe en la tarea. Asimismo, que no se espere de nuestra

instauración que sea algo infinito o suprahumano, puesto que en realidad es el término conveniente y el fin de un error inacabable". (Kant, 2008, BII).[1]

Pensamos que dicho lema es, en cierto aspecto, el sentido real de la *Crítica de la razón pura* porque, uno, al igual que el *Instauratio Magna,* no son las bases para alguna secta; y, dos, porque se trata de servir al bien general, que en este caso es mostrar cómo el hombre procede en la elaboración y la obtención del conocimiento, sin que ello se vea como algo infinito o suprahumano. Por eso, los ejemplos de Kant de cómo conoce el sujeto son ejemplos netamente científicos.

2. Del conocimiento puro y del empírico

"No hay duda de que todo nuestro conocimiento comienza con la experiencia; […] pero aunque todo conocimiento comience **con** la experiencia, no por eso surge todo él **de** la experiencia" (Kant, 2009, B1). Así es como Kant empieza la Introducción de la *Crítica de la razón pura*. Para Kant, el papel de la experiencia es quien permite que la facultad sensible sea motivada y despertada para actuar, permitiendo que el entendimiento cuente con el material para poder ejercer su función. Ahora bien, ello no quiere decir que todo nuestro conocimiento proceda únicamente de la experiencia. Kant no acepta aquí el principio empirista de que nuestro conocimiento procede únicamente de la experiencia. Y aunque niega la existencia de ideas innatas, separándose de ese modo de los racionalistas, defenderá la existencia de conceptos puros que el entendimiento forma a partir de sí mismo aunque con ocasión de la experiencia. Según Kant, es cierto que tales conceptos únicamente se llenan de significado cuando se aplican

[1] Baco de Verulamio
Instauratio magna. Praefatio
"De nobis ipsis silemus: De re autem, quae agitur, petimus: ut homines eam non Opinionem, sed Opus esse cogitent; ac pro certo habeant, non Sectae nos alicuius, aut Placiti, sed utilitatis et amplitudinis humanae fundamenta moliri. Deinde ut suis commodis aequi… in commune consulant… et ipsi in partem veniant. Praeterea ut bene sperent, neque Instaurationem nostram ut quiddam infinitum et ultra mortale fingant, et animo concipiant; quum revera sit infiniti erroris finis et terminus legitimus." (Kant, 2008, BII). **Nota:** Los puntos seguidos son propios de las omisiones de Kant y no pertenecen a nosotros.

en el ámbito de la experiencia, pero ello no quiere decir que su formación dependa absolutamente de ella. La mente posee la capacidad de formar, por sí misma, conceptos puros o categorías, es decir, conceptos vacíos que se van llenando de contenido empírico, en contacto con la experiencia.

Según Kant, si es cierto que existe un conocimiento que funciona independientemente de la experiencia, entonces es necesario intentar averiguar qué y cuánto puede conocer el entendimiento y la razón al margen de la experiencia. Para ello, sería necesario descubrir las condiciones que nos expliquen cómo el sujeto tiene la capacidad de poseer conceptos puros a priori, al margen de la existencia de ideas innatas, que Kant niega. Pero, si no existen ideas innatas, entonces, para explicar cómo el entendimiento puede formular conceptos puros al margen de la experiencia, no hay más remedio que defender la existencia de condiciones empíricas objetivas como la luz, la naturaleza, la realidad del mundo exterior, etc. y de condiciones empíricas subjetivas (sentidos). Sin ese material, el entendimiento no podría ejercer sus funciones. Según Kant, esas condiciones empíricas nunca podrían por sí mismas explicar la existencia en el sujeto de conceptos puros que son independientes de la experiencia. El problema estaría en descubrir cómo el sujeto es capaz de poseer tales conceptos sabiendo que la experiencia, aun siendo necesaria, nunca podría producir ello. Estamos ante lo que Kant denomina el problema del conocimiento a priori.

Así bien, uno de los problemas centrales de la filosofía de Kant es lo que se llama el problema del conocimiento a priori. El entendimiento humano, según Kant, tiene la capacidad de formular por sí mismo, al margen de la experiencia, conceptos puros o categorías. Pero, ¿cómo es eso posible si no existen ideas innatas? Para responder a esta cuestión, Kant comienza diferenciando entre conocimiento relativamente a priori y conocimiento absolutamente a priori, para señalar que, a él, lo que le interesa analizar primordialmente es el problema del conocimiento puramente a priori. Con ello, Kant quiere señalar que lo que le interesa investigar no es el conocimiento a priori referido a tal o cual experiencia (relativamente a priori). Por ejemplo, una casa sin buenos cimentos sabemos a priori que caerá. Lo que le interesa investigar a Kant es el conocimiento que funciona puramente a priori.

Cuando Kant dice “existe realmente en el conocimiento humano juicios de un valor necesario y en la más estricta significación universales; por consiguiente, juicios puros a priori” (Kant, 2009, B5), se está refiriendo a una clase en especial de juicios a priori puros, pero que igual son a priori. Aquí hay que hacer la distinción que Kant tiene entre a priori puro y simplemente a priori. La explicación es un tanto técnica, pero lo podemos explicar de la siguiente manera con algunos ejemplos de Kant, así tenemos que “Todo cambio tiene una causa”. En efecto, un hombre sabe que una casa sin buenos cimentos caerá. Este será un juicio a priori, pero no puro. Ahora “Todo cambio ha de tener una causa” será a priori puro porque se habla de una totalidad de eventos que cambian ante una causa, eventos de los cuales no hemos tenido experiencia. En otras palabras, y con otro ejemplo, cuando yo arrojo un trapo al fuego a priori sé que se va quemar. Ese a priori no es puro porque conlleva a tomar en cuenta eventos que hemos tenido. Entonces, tiene algo de experiencia. Cuando decimos “El mundo ha de tener una causa”, ese es a priori puro al igual que “Todo cambio ha de tener una causa”, porque no hemos tenido experiencia de ello, pero suponemos que tuvo que haber tenido una causa, porque todo tiene una causa. Pero no es a priori, sino a priori puro, porque va más allá de la experiencia, suponemos ello.

Ahora bien, ambos conceptos a priori y a priori puro poseen universalidad y necesidad. El primero (el simplemente a priori), es universal porque siempre que se arroje al fuego una prenda esta se quemará, y siempre será de ese modo y no de otro. En ello radica su necesidad. En cuanto al a priori puro, en el ejemplo “El mundo ha de tener una causa” es de carácter universal porque pensamos que todo tiene una causa de ser y creemos que no puede ser de otro modo. En ello también radica su necesidad.

> “*¿Cómo es posible contemplar algo a priori*? La intuición es una representación, en tanto que puede depender de la presencia inmediata del objeto. Según esto, parece imposible intuir *originariamente a priori*, porque, entonces, la intuición debería verificarse sin la presencia previa o actual de un objeto el cual se relacionara, y, así, no podría ser intuición.

> Los conceptos son, en verdad, de tal naturaleza, que algunos de ellos, especialmente los que contienen solo el pensamiento de un objeto en general, pueden ser realizados completamente a priori, sin que nos encontremos en una relación inmediata con los objetos; por ejemplo: el concepto de magnitud, de causa, etc.” (Kant, 2010b, Ak. IV, 282).

En resumen, las características de lo que Kant llamaba a priori o a priori puro, o, si se quiere, las características del juicio a priori es las de ser universal y necesario, sea a priori o a priori puro. Por último, aquí podría surgir una pregunta, ¿los juicios sintéticos a priori son universales y necesarios? Por supuesto, pero no de manera estricta como lo son los a priori puros, sino como los son los simplemente a priori. La respuesta es única, cuando el sujeto conoce lo que conoce es producto de la mezcla que hace y capta tanto sus sentidos y su razón, pero ese sujeto que conoce no se queda callado sobre lo que ha conocido, sino que emite palabras sobre lo que ha conocido, o sea, emite juicios, y ellos son juicios sintéticos a priori, como producto de la mezcla que ha hecho, es decir, como producto de la forma que ha captado que es a través de sus sentidos y de su razón.

Sentado esto, según Kant, que el conocimiento sea puramente a priori (al no existir ideas innatas), no quiere decir que proceda de otro mundo. Todo conocimiento humano (incluido el a priori o el puramente a priori), aunque no derive absolutamente de la experiencia, como pensaban los empiristas, si se produce por parte de la experiencia. Ahora bien, ¿qué es un conocimiento a priori? Kant considera como conocimiento a priori aquel que posee universalidad y necesidad, pues la necesidad y universalidad son signos seguros de conocimiento a priori. Al mismo tiempo, Kant considera que tal conocimiento existe realmente con solo percibir que formulamos ciertos juicios que se nos presentan como poseyendo las características de universalidad y necesidad. Es el caso, según Kant, de cuando afirmamos que “Todo cambio tiene una causa”. Tal juicio, aunque tenga su base en la experiencia (vemos que las cosas cambian debido a causas), lo cierto es que parece poseer universalidad y necesidad que supera toda posibilidad de experiencia, ya que ni en el pasado remoto ni en futuro lejano hemos tenido experiencia de tal hecho.

Sin embargo, pensamos que tal juicio es válido en todo lugar y en todo momento (universalidad), y, además, pensamos que no puede dejar de ser así (necesidad). ¿De dónde nos viene esa seguridad? Kant sabía que Hume se había planteado también la misma cuestión. Sabía también de su respuesta: todo se debía al hábito y la costumbre en asociación de ideas. La respuesta de Kant es muy diferente. ¿Cómo es posible, según Kant, el conocimiento a priori? Para Kant, es evidente que existen juicios que son universales y necesarios (a priori). Basta con darle un vistazo a los juicios presentes en el ámbito de la matemática o de la física para poder verlo con claridad. Ahora bien, ¿cómo son posibles tales juicios? ¿Qué condiciones existen en tales ciencias que les permiten formularlos? ¿Qué condiciones existen en el ser humano que permite que puedan ser formulados? Para contestar a todas esta preguntas, Kant empieza analizando la naturaleza de los juicios.

3. Sobre lo analítico, sintético y lo sintético a priori

En el libro segundo *La analítica de los principios*, capítulo II *Sistema de todos los principios del entendimiento puro* yacen tres secciones. Las dos primeras son las que forman parte de nuestro interés. La primera es *El principio supremo de todos los juicios analíticos*. La segunda es *El principio sintético de todos los juicios sintéticos a priori*.[2]

---

[2] Ahora bien, aquí podría haber una objeción, que la demostración de los juicios sintéticos a priori en la matemática deberían terminar en la Estética trascendental y que no cabe hablar de ello recorriendo las líneas de la Analítica de los principios, Más aún, si lo expuesto en ello sería consecuencia y no argumentos probatorios de los juicios sintéticos a priori en la matemática. No obstante, sostenemos que la Analítica de los principios trata de los principios, sin los cuales, ningún objeto podría ser pensado. Así bien, recurrimos a las líneas escritas de Kant, vertidas en la introducción de la Analítica de los principios, donde se sostiene que los principios de la matemática, sus "juicios sintéticos a priori, tendrá un lugar aquí necesariamente [para ver] la posibilidad de ellos, no para demostrar su corrección y certeza apodíctica -ellos no necesitan eso-, sino solo para hacer comprensible la posibilidad de tales conocimientos a priori evidentes, y para deducirlos.
Deberemos hablar también del principio de los juicios analíticos, y esto en | oposición al de los sintéticos, de los que propiamente nos ocupamos; porque esta contraposición libera la teoría de los últimos de todo malentendido, y los pone a la vista nítidamente en su naturaleza peculiar" (Kant, 2009, B189-A150). Así

En cuanto a la primera parte, sobre *El principio supremo de todos los juicios analíticos*, se sostiene que dichos juicios se rigen bajo el principio de no-contradicción. Así, la proposición “a ninguna cosa conviene un predicado que la contradiga”, no solamente se le puede adjudicar dicho principio, sino también un criterio universal, aunque meramente negativo, de toda verdad; por lo cual pertenece solamente a la lógica, pues vale para los conocimientos como conocimientos en general, prescindiendo de su contenido, y dice que la contradicción los aniquila enteramente y los suprime.

Pero de ese principio puede hacerse también un uso positivo, es decir, no solo para excluir la falsedad y el error (en cuanto descansan en la contradicción), sino también para conocer la verdad. Pues, si el *juicio es analítico,* sea afirmativo o negativo, tiene que ser siempre conocida su verdad suficientemente, según el principio de contradicción. Pues lo contrario de aquello, que en el conocimiento del objeto incide y es pensado como concepto, tendrá siempre correctamente que ser negado, pero el concepto mismo del objeto habrá de ser afirmado, porque su contrario contradiría al objeto.

> “Por eso, debemos admitir, ciertamente, al *principio de contradicción* como el *principio* universal y enteramente suficiente *de todo conocimiento* analítico; pero su autoridad y su utilidad no van tampoco más allá de [ser] un criterio suficiente de la verdad. Pues el que ningún conocimiento pueda serle contrario, sin aniquilarse a sí mismo, eso hace de esta proposición por cierto, una *conditio* | *sine qua non*, pero no hace de ella un fundamento de determinación de la verdad de nuestro conocimiento. Ahora bien, puesto que nuestra tarea concierne, propiamente, solo a la parte sintética de nuestro conocimiento, tendremos siempre, ciertamente, la preocupación de no actuar nunca en contra de este principio inviolable, pero nunca podremos esperar de él ningún esclarecimiento respecto de la verdad de esa especie de conocimiento” (Ídem, A152).

Empero, según Kant, hay una fórmula de ese principio famoso, aunque desprovisto de todo contenido y simplemente formal, que encierra una síntesis que

bien, nosotros solo sacamos a flote lo que Kant encuentra en su revisión de dichos juicios, con el objetivo no de probar, sino solo de clarificar lo que subyace en la existencia de tales juicios, principalmente en el juicio sintético a priori enrolado a la aritmética.

se ha mezclado con él por imprevisión y en modo totalmente innecesario. Dice esa fórmula: «es imposible que algo sea y no sea *al mismo tiempo».* Aparte de que aquí se introduce superfluamente la certeza apodíctica (con la palabra *imposible),* que debe de suyo desprenderse de la proposición, esta queda afectada por la condición del tiempo, como si dijéramos una cosa, A, que es algo, B, no puede en el mismo tiempo ser no-B; pero puede muy bien ser ambas cosas (B y no-B) sucesivamente. "P. ej. Un hombre que es joven no puede ser, simultáneamente, viejo; pero el mismo hombre puede muy bien ser joven en un tiempo, y no joven, es decir, viejo, en otro tiempo" (Ídem, B192). Ahora bien, el principio de contradicción, como principio meramente lógico, no debe limitar sus expresiones a las relaciones de tiempo. Por eso, esa fórmula es contraria a la intención del principio. La mala inteligencia proviene tan solo de que un predicado de una cosa ha sido separado primero del concepto de ella y, después, se une lo contrario a ese predicado, lo cual no produce nunca contradicción con el sujeto, sino con sus predicados enlazados sintéticamente al sujeto; y la produce solo cuando el primero y segundo predicado son afirmados al mismo tiempo.

> "Si yo digo: un hombre que es inculto, no es culto, tiene que estar ahí la condición: *al mismo tiempo*; pues aquel que en un tiempo no es culto, puede muy bien ser culto en otro tiempo. Pero si digo: ningún hombre inculto es culto, la proposición es analítica, porque la nota (de la incultura) forma parte, ahora, del concepto del sujeto, y entonces la proposición negativa resulta inmediatamente del principio de contradicción, sin que necesite añadir la condición: *al mismo tiempo*" (Ídem, B193).

Esta es la causa por la cual Kant ha variado antes la fórmula del principio de tal modo que la naturaleza de una proposición analítica quede claramente expresada.[3]

[3] El análisis lo lleva a Kant a desmembrar lo que hay dentro de un juicio analítico, y muchas veces a este lo hace parecer empíricos. Kant tiene una justificación para ello, así señala en *Prolegómenos*: "Por esto mismo son también las frases analíticas juicios a priori, aunque sus conceptos sean empíricos, por ejemplo: el oro es un metal amarillo; pues, para saber esto, no necesito experiencia alguna más amplia, exterior a mi concepto de oro, el cual supone que este cuerpo sea amarillo y metal; pues en esto consiste mi concepto y no necesito hacer otra cosa que analizarlo sin buscar cosa alguna fuera del mismo" (Kant, 2010b, Ak. IV, 267).

En cuanto a la segunda sección, *El principio sintético de todos los juicios sintéticos a priori*, se sostiene que la explicación de la posibilidad de los juicios sintéticos es un problema que no tiene que ocuparse para nada la lógica general, sin embargo, sí la lógica transcendental. El asunto se torna muy importante, ya que se habla de la posibilidad de juicios sintéticos *a priori,* como de las condiciones y extensión de su validez. La lógica transcendental puede satisfacer perfectamente su propósito, a saber: determinar la extensión y los límites del entendimiento puro.

En el juicio analítico, cuando decimos ¿es afirmativo?, atribuimos a ese concepto solo aquello que era ya pensado en él. Cuando decimos ¿es negativo?, excluimos de él solamente su contrario. Pero, en el juicio sintético, debo salir del concepto dado para considerar, en relación con este, algo totalmente distinto de lo en él pensado; relación que no es nunca ni de identidad ni de contradicción, y por la cual no puede conocerse en el juicio mismo ni la verdad ni el error.

Así pues, en los juicios sintéticos se debe salir de un concepto dado para compararlo sintéticamente con otro, quedando un tercer requisito, en el cual solamente puede originarse la síntesis de ambos conceptos. Entonces, ¿qué es este tercer requisito sino el médium de todos los juicios sintéticos? Solo hay un conjunto, en el cual están contenidas todas nuestras representaciones, que es, a saber, el sentido interno y la forma del mismo a priori: el tiempo.

Según Kant, si un conocimiento ha de tener realidad objetiva, es decir, referirse a un objeto y poner en la misma significación y sentido, debe el objeto poder ser dado de alguna manera. Sin eso, son los conceptos vanos. Y aunque en realidad se ha pensado, nada se ha conocido por ese pensamiento, no se ha hecho más que jugar con representaciones. Darse un objeto -si ello no ha de entenderse solo mediatamente, sino como exponerlo inmediatamente en la intuición-, no es otra cosa que referir su representación a la experiencia (real o al menos posible). El espacio y el tiempo mismos, son tan puros de todo lo empírico y tan cierto que son representados enteramente *a priori* en el espíritu, carecerían de validez objetiva, de sentido y significación si no se mostrara su uso necesario en los objetos de la experiencia. Es más, su representación es un esquema que se refiere siempre a la imaginación productiva, que evoca los objetos de la experiencia, sintetizándolos y proporcionándoles significación; y así ocurre con todos los conceptos sin distinción.

> "La *posibilidad de la experiencia* es, pues, lo que les da realidad objetiva a todos nuestros conocimientos *a priori*. Pero la experiencia se basa en la unidad sintética de los fenómenos, es decir, en una síntesis según conceptos de un objeto en general, sin la cual ella no llegaría a ser conocimiento, sino una rapsodia de percepciones que se podrían hacer compatibles entre sí en ningún contexto, según reglas de una conciencia (posible) íntegramente interconectada, y por consiguiente tampoco [se podría hacer compatible] con la unidad trascendental y necesaria de la apercepción" (Kant, 2009, B196).[4]

Así es como Kant sostiene que la experiencia tiene como fundamento, principios de su forma *a priori,* a saber: reglas universales de la unidad, en la síntesis de los fenómenos, cuya objetiva realidad como condiciones necesarias puede siempre mostrarse en la experiencia y aun en su posibilidad. Fuera de esa referencia, son enteramente imposibles las proposiciones sintéticas *a priori,* porque no tienen el tercer requisito, a saber: un objeto en el cual la unidad sintética de sus conceptos pueda mostrar realidad objetiva.

Por eso, aunque conocemos del espacio en general, o de las figuras que la imaginación productiva dibuja en él, muchas cosas *a priori* en juicios sintéticos, de suerte que realmente no necesitamos para ello experiencia alguna. Este conocimiento no sería nada, sería ocuparse con una mera fantasía, si el espacio no hubiera de considerarse como la condición de los fenómenos que constituyen la materia de la experiencia externa. Por eso, esos juicios sintéticos puros se refieren, aunque solo mediatamente, a la experiencia posible o más bien a la posibilidad misma de la experiencia, y solo en ello fundamentan la validez objetiva de su síntesis.

---

[4] La *unidad trascendental* es la síntesis que el sujeto recoge de todas las características de algo dado. La *apercepción* es la conciencia de sí mismo, en este caso de conocer algo dado.

> “Para presentar un ejemplo más claro tomemos el siguiente: “si un rayo de sol cae sobre la piedra, esta se calienta”. Este es un juicio puramente de percepción, y no contiene necesidad alguna; puede haber hecho frecuentemente esta observación, cualquier otro pueda haberla hecho también; las percepciones se encuentran enlazadas meramente de este modo comúnmente. Pero si digo *el sol calienta las piedras*, entonces a la observación se añade el concepto de causa, el cual enlaza necesariamente el concepto de rayo del sol con el de calor, y el juicio sintético se hace necesariamente válido en general, por consiguiente objetivo, y de una percepción se cambia en una experiencia” (Kant, 2010b, Ak. IV, 301).

Ya que la experiencia como síntesis empírica es en su posibilidad la única especie de conocimiento que da realidad a toda otra síntesis, tiene esta también, como conocimiento *a priori,* verdad (coincidencia con el objeto) solo porque no encierra más que lo necesario para la unidad sintética de la experiencia en general. Así pues, “el principio supremo de todos los juicios sintéticos es: todo objeto está bajo las condiciones necesarias de la unidad sintética de lo múltiple de la intuición en una experiencia posible” (Kant, 2009, B197-A158).

De esa manera, los juicios sintéticos *a priori* son posibles cuando las condiciones formales de la intuición *a priori,* la síntesis de la imaginación y la necesaria unidad de la misma, en una apercepción transcendental, son referidas por nosotros a un conocimiento de experiencia posible en general. Decimos, entonces: las condiciones de la *posibilidad de la experiencia* en general son al mismo tiempo condiciones de la *posibilidad de los objetos de* la *experiencia* y tienen por ello validez objetiva en un juicio sintético *a priori.*[5]

[5] “Todos nuestros juicios son, primero, meros juicios de percepción; valen solamente para nosotros, esto es, para nuestro sujeto, y solo después les damos una referencia nueva, a saber, una referencia a un objeto, y pretendemos que ello sea válido para nosotros también en todo tiempo, y que sea igualmente válido para cualquier otro; porque cuando un juicio concuerda con un objeto, todos los juicios sobre el mismo objeto deben también concordar entre sí, y así, la validez objetiva del juicio de experiencia no significa otra cosa, sino la necesaria validez universal del mismo. Pero también a la inversa, si encontramos motivo para tener un juicio por necesariamente válido universalmente (lo cual nunca se basa en la percepción, sino en el concepto puro del entendimiento, bajo el cual está subsumida la percepción) debemos tenerlo también por objetivo, esto es, considerar que no expresa solo una referencia de la percepción a un sujeto, sino una propiedad del objeto; pues no habría razón por la cual otros juicios debieran concordar necesariamente con el mío, si no fuese la unidad del objeto, al cual todos se refieren, con el cual concuerdan, debiendo por tanto concordar también entre sí.
Validez objetiva y validez universal necesaria (para todos) son, por tanto, conceptos intercambiables; y aunque no conocemos el objeto en sí, sin embargo, cuando consideramos que un juicio es válido para todos

En la Introducción de la *Crítica de la razón pura,* recogemos lo más clásico de la distinción de los juicios en Kant, que por cierto ha sido digno de comentario por varios autores. Uno de ellos se expresa de la siguiente forma:

> "Kant, a lo largo de la crítica, hace uso frecuente de cierta distinción a la que no he hecho referencia: la distinción entre las proposiciones analíticas y sintéticas a priori. Se dice que ambos tipos de proposiciones tienen en común el que pueden ser conocidos no solo como verdaderas, sino de tal forma que ninguna experiencia podría afirmarlas o presentar un contraejemplo. En este sentido, ambos tipos de proposiciones son contrastadas con las proposiciones verdaderamente empíricas, que son aquellas que sabemos son verdad solo y en la medida que son confirmadas por la experiencia. Kant mantiene que mientras el carácter a priori de las proposiciones analíticas no plantea un problema filosófico profundo, algo muy distinto sucede con las proposiciones sintéticas a priori. De hecho, dice en la Introducción que todo el problema, a cuya solución está dedicada la Crítica de la Razón Pura, puede resumirse en la siguiente pregunta: ¿Cómo son posibles los juicios sintéticos a priori?" (Strawson, 1985, pp. 37-38).

En la Introducción de la *Crítica de la razón pura* es donde Kant determina lo que son los juicios analíticos, juicios sintéticos y juicio sintético a priori. Se sostiene que los juicios analíticos tienen la forma de que el predicado está contenido en el sujeto y son universales, necesarios, explicativos y a priori; y los juicios sintéticos tienen la forma de supuestos comparativos, son contingentes, extensivos, particulares y a posteriori. Así, Kant tiene como ejemplo: "todos los cuerpos son extensos". Este es un juicio analítico debido a que no necesitamos decir extenso para decir que los cuerpos son extensos, pues todo cuerpo sabemos

---

y por tanto necesario, entendemos precisamente con ello la validez objetiva. Mediante este juicio conocemos el objeto (aunque este permanezca desconocido respecto de cómo sea en sí mismo) por medio de la conexión universalmente válida y necesaria de las percepciones dadas; y pues tal es el caso de todos los objetos de los sentidos, los juicios de experiencia recibirán su validez objetiva, no del conocimiento inmediato del objeto (pues este conocimiento es imposible), sino meramente de la condición de la validez universal de los juicios empíricos, la cual, como se ha dicho, jamás se funda en las condiciones empíricas ni, en general, en condiciones sensibles, sino en un concepto puro del entendimiento. El objeto sigue siendo siempre desconocido en sí mismo; pero si, mediante el concepto del entendimiento, se determina como válida universalmente la conexión de las representaciones que le son dadas por él a nuestra sensibilidad, entonces el objeto será determinado por esta relación, y el juicio es objetivo." (Kant, 2010b, Ak. IV, 298-299) que tiene una extensión (figura). Por lo tanto, con dicha proposición “todos los cuerpos son extensos”. El predicado está contenido en el sujeto. Lo contrario ocurre con los juicios sintéticos, que en comparación de los juicios analíticos tiene como ejemplo: “todos los cuerpos son pesados”. El predicado nos está diciendo algo más del sujeto, por ende está dando una extensión del sujeto. Establecida esta diferencia, hay que decir además que los juicios sintéticos a priori no tienen una universalidad ni necesidad como hemos señalado anteriormente, pero puede que arroje una generalidad y se piense que dicho juicio sea universal. Lo será, pero no de manera estricta, como los juicios analíticos que son a priori.

Caso distinto corren los juicios sintéticos a priori que tienen su explicación en las ciencias matemáticas y en la física, siendo la primera una ciencia más pura que la segunda. Por ende, Kant hace referencia a la primera, mediante la aritmética y la geometría. La primera es la que nos interesa. Se señala que 5 + 7 = 12 donde nosotros no sabemos que 12 no está contenido ni en 5 ni en 7. Vendría a ser a priori por el concepto de suma que hay allí y vendría a ser sintético porque hace falta operar para saber que dicha suma da determinada cantidad; es decir, 12. Kant sostiene que deberíamos utilizar los dedos de la mano para darnos cuenta de ello o de lo contrario bastaría pensar en una suma de cifras mayores, para percatarnos de ello. [6] En estricta analogía tenemos también lo siguiente

[6] “Al comienzo podría pensarse que la proposición 7 + 5 = 12 fuese una proposición meramente analítica que se siguiera del concepto de una suma de siete y cinco según el principio de contradicción. Pero si se lo considera más de cerca, se encuentra que el concepto de la suma de 7 y 5 no contiene nada más que la unificación de ambos números en uno único; con lo cual no se piensa, de ninguna manera, cuál sea ese número único que los abarca a ambos. El concepto de doce no está en modo alguno ya pensado, solo porque yo piense aquella unificación de siete y cinco; y por mucho que yo analice mi concepto de una suma posible tal, no encontraré en él el doce. Se debe salir fuera de esos conceptos, procurando el auxilio de la intuición que corresponde a uno de los dos, por ejemplo los cinco dedos, o bien (como *Segner* en su aritmética) cinco puntos, y agregando así, poco a poco, las unidades del cinco dado en la intuición, al concepto siete. Pues tomo primeramente el número 7 y, tomando como ayuda, como intuición, para el concepto de 5, los dedos de mi mano, añado ahora poco a poco al número 7, en aquella imagen mía, las unidades que antes// reuniera para formar el número 5, y veo así surgir el número 12. Que *tenía* que ser añadido a 5 ya lo había pensado yo, ciertamente, en el concepto de una suma = 7 + 5; pero no que esta suma fuese igual al número 12. La proposición aritmética es, por tanto, siempre sintética; lo que se torna más nítido cuando se toman números un poco mayores; pues entonces se pone de manifiesto claramente que por más vueltas que demos a nuestros conceptos, nunca podemos encontrar la suma mediante el mero análisis de nuestros conceptos, sin recurrir al auxilio de la intuición” (Kant, 2009, B16) Esto es lo que se dice en la *Crítica*, lo que sigue es lo que se dice en los *Prolegómenos* que por cierto es algo similar: “Se debió,

cuando decimos demostrar que A=A o cuando los matemáticos dicen (a + b) > a. Ellos no simplemente lo dicen, sino que lo demuestran. Y esa forma de demostrar, es una forma de hacer algo sintético pues lo "experimentan". Experimentan la respuesta.

Ahora bien, si en las ciencias como la aritmética existen juicios sintéticos a priori, ello no se debe a la existencia como algo independiente y al margen del sujeto. La ciencia formula tales juicios, pero, al mismo tiempo, la ciencia es obra del sujeto. Esto explica el hecho de que Kant, a la hora de analizar la posibilidad de los juicios sintéticos a priori en las ciencias, *entremezcle tal análisis con la estructura cognoscente del sujeto*. "La Crítica procede por vía lógica. La cuestión: cómo son posibles…es una cuestión de derecho, no una cuestión de hecho, y hace referencia a una exploración de los principios que se requieren lógicamente para explicar los juicios sintéticos a priori" (Verneaux, 1978, pág. 23). Y es que no basta, según Kant, con demostrar las razones que nos puedan explicar el por qué la ciencia formula juicios universales y necesarios; hay que explicar también las razones que permiten la existencia de sujetos que realizan tales juicios. Para ello, no hay más remedio que analizar el cómo se encuentran estructurados los elementos responsables del conocimiento humano. Y uno de esos primeros elementos son los que ubicamos en la Estética trascendental.

---

primeramente, pensar que la proposición "7 + 5 = 12" es una proposición puramente analítica, la cual se deriva del concepto de una suma de 7 y 5, según el principio de contradicción. Solo si se la considera más de cerca, se encuentra que, el concepto de la suma de 7 y 5 no contiene nada más que la reunión de dos números en uno solo, por la cual no se piensa, en modo alguno, cuál es el número particular que reúne los dos. El concepto de 12 no es, en modo alguno, pensado sencillamente porque yo piense la reunión de 7 y 5, y, por largo tiempo que analice el concepto de tal suma posible, no encontraré en ella el concepto 12. Se debe pasar más allá de este concepto, tomando por ayuda la intuición que corresponde a uno de los dos; por ejemplo los cinco dedos, o (como Segner en su aritmética) cinco puntos y así sucesivamente, tomando por ayuda y añadiendo las unidades del número cinco, dado en la intuición al concepto de siete. Se amplía, pues, verdaderamente su concepto por esta proposición 7 + 5 = 12, y se añade al primer concepto uno nuevo, el cual, en modo alguno, estaba concebido en aquél; esto es, la proposición aritmética es siempre sintética, lo cual se apreciará más claramente si se toman números algo mayores; de donde resulta manifiesto que, por muchas vueltas que demos a nuestro concepto, sin valernos de la intuición, mediante la pura descomposición de nuestro concepto, jamás podremos encontrar la suma" (Kant, 2010b, Ak. IV, 268-269)

4. Sobre la percepción sensorial

Según Kant, la intuición es el modo por medio del cual el conocimiento se refiere de forma inmediata a los objetos que nos son dados y la sensibilidad viene a ser la capacidad de recibir representaciones al ser afectadas por los objetos. Esta es la que nos proporciona las intuiciones que se relacionan directamente con el entendimiento, que viene a ser la facultad que nos permite pensar los objetos dados en la intuición y de él vendrían los conceptos. Así bien, Kant sostiene que el sujeto, para conocer, posee la sensibilidad y el entendimiento. Ambos interactúan en el mismo instante que el sujeto conoce, "[…] hay dos troncos del conocimiento humano, que quizá broten de una raíz común, aunque desconocida para nosotros; a saber: *sensibilidad* y *entendimiento;* por el primero de ellos los objetos nos son *dados*, y por el segundo, son *pensados*" (Kant, 2009, B29).

Ahora bien, aquel objeto que produce un efecto sobre la sensibilidad, es lo que hace surgir una sensación. Kant denomina intuición empírica a aquella intuición que se refiere al objeto por medio de una sensación. Este tipo de intuición no sería ni formal, ni pura, sino material.

Cuando el objeto de la intuición es algo indeterminado, estamos ante lo que Kant llama como fenómeno. En este sentido, parece que lo indeterminado se corresponde con el espacio y el tiempo. El espacio y el tiempo son intuiciones puras que no contiene nada de sensación, lo que implica que lo fenoménico no debería contener nada material o empírico. Sin embargo, Kant sostiene que dentro de lo fenoménico puede estar presente la materia y la forma, lo que hace indicar que el fenómeno es algo distinto del espacio y del tiempo. Así bien, "[…] el espacio y el tiempo no tienen realidad en sí mismos, sino que radican en la sensibilidad del hombre, de manera que los objetos empíricos que se nos dan en ellos son fenómenos y no cosas en sí mismas" (Parellada, 2011, p. 30). Por ello, en estos casos, se podría identificar también lo fenoménico con la experiencia en general.

Ahora bien, lo que dentro del fenómeno se corresponde con la sensación es la materia, pero en la estética trascendental a Kant le interesa sobre todo descubrir la forma de lo fenoménico y aquello que hace que lo diverso del mismo pueda ser ordenado o "visto" intuitivamente como ordenado. Para Kant, las sensaciones solo pueden ser ordenadas en aquello que no puede ser, a su vez, sensación. La forma del fenómeno debe estar completamente a priori dispuesta para el conjunto de las sensaciones en el psiquismo y tiene que ser independiente de toda sensación. Kant habla de espacio y tiempo como las formas a priori de nuestra sensibilidad, lo que implica que serían las responsables, por así decir, de ordenar lo diverso presente en la sensibilidad. Lo que sucede es que espacio y tiempo son intuiciones puras. "Intuiciones" porque permiten la intuición empírica (son el marco en el que se han de dar dichas intuiciones) y "puras" porque no tienen un origen empírico. Bajo ese sentido serían realidades que percibimos de modo inmediato y que no contienen nada de materia ni de sensación.

Aquí cabe hacer una aclaración, la materia de todo fenómeno es aquella que nos viene dada únicamente a posteriori. Y las representaciones en las que no se encuentra nada perteneciente a la sensación, Kant las denomina, como dijimos líneas arriba, formas puras o intuiciones puras, y son el espacio y el tiempo. Tales intuiciones puras de la sensibilidad se hallan a priori en el psiquismo humano. Así, "muchos fisiologistas sensoriales y psicologistas alemanes en el siglo XIX vieron la doctrina del espacio de Kant como una tesis psicológica sobre el carácter innato de la percepción espacial" (Guyer, 2006, p. 87).[7] Así pues, lo que queremos dejar en claro es que la intuición es el modo por medio del cual el conocimiento se refiere de forma inmediata a los objetos que nos son dados. La sensibilidad tiene la capacidad de recibir representaciones, al ser afectada por los objetos. La sensibilidad es la única que nos suministra intuiciones. Al mismo tiempo, el entendimiento piensa los objetos y de tal pensamiento proceden los conceptos puros o categorías. Un objeto, al producir un efecto sobre la sensibilidad, hace surgir una sensación. En este caso la intuición, relacionada con la sensación, es empírica. Cuando nos referimos a un objeto indeterminado de una intuición empírica, estamos ante el fenómeno. Lo que se corresponde, dentro del fenómeno, con la sensación es la materia que es a posteriori. Por su parte, lo que

[7] "Many German sensory physiologists and psychologists in the nineteenth century viewed Kant's doctrine of space as a psychological thesis about the innateness of spatial perception."

permite que lo diverso, dado en la sensación, sea ordenado (intuido como ordenado) es la forma, ello es a priori. Además, en aquellas representaciones en donde no se encuentra nada perteneciente a una sensación, constituye una intuición pura. Según Kant, el espacio y el tiempo son dos representaciones que no contienen nada de sensación-materia por lo cual son (intuiciones puras), pero, además, permiten que lo diverso dado en la sensación sea ordenado (formas puras). Por último, la ciencia que estudia los principios de la sensibilidad es la estética trascendental. Según Kant, existen dos principios a priori de la sensibilidad, que son espacio y tiempo.

Pese a lo dicho cabe hacer una pregunta, ¿El espacio y tiempo corresponde a un condicionamiento psíquico o son categorías a priori de acuerdo a Kant? Según Kant, el espacio y el tiempo no son rasgos que las cosas tengan independientemente de nuestro conocimiento de ellas. El espacio y el tiempo son las formas a priori de la sensibilidad externa (o percepción de las cosas físicas), y el tiempo la forma a priori de la sensibilidad interna (o percepción de la propia vida psíquica). Estas representaciones no tienen un origen empírico, es decir, no se extraen de la experiencia sensible, sino que son su condición de posibilidad. Gracias a estas formas de la sensibilidad, el sujeto cognoscente estructura las sensaciones proyectando todo lo conocido en la dimensión espacio–temporal (las cosas físicas en el espacio–tiempo y los fenómenos psíquicos en la dimensión meramente temporal).

En conclusión, en primer lugar, hemos visto qué trascendental es aquello que el sujeto define del objeto en el mismo acto que conoce al objeto. El sujeto mediante sus gafas teóricas solo coloca en el objeto algo que él ve, lo que él cree que es y no lo que realmente el objeto es, y ello es el giro copernicano kantiano, que nos lleva a sostener el sentido de "crítica", y ello no es más que una "crítica a la razón de la razón". Crítica tiene un matiz limpiador y esclarecedor de la razón, depurando la misma y manteniéndola libre de errores, con lo cual revisa la manera y el derecho con que llega a los conocimientos.

En segundo lugar, hemos visto la distinción del conocimiento puro del empírico. Vimos que el papel de la experiencia es quien permite que la facultad sensible sea motivada y despertada para actuar, permitiendo que el entendimiento cuente con el material para poder ejercer su función. Ahora bien, según Kant, si es cierto que existe un conocimiento que funciona independientemente de la experiencia, entonces, es necesario intentar averiguar qué y cuánto puede conocer el entendimiento y la razón al margen de ella. Allí está uno de los problemas centrales de la filosofía de Kant, lo que se llama el problema del conocimiento a priori. En Kant, el entendimiento humano tiene la capacidad de formular por sí mismo, al margen de la experiencia, conceptos puros o categorías. A él, lo que le interesa analizar primordialmente es el problema del conocimiento absolutamente a priori y no el relativamente a priori.

En tercer lugar, vimos la distinción de los juicios analíticos, juicios sintéticos y juicios sintéticos a priori, de donde de estos últimos se compone la ciencia (matemática y física). Pero demostrar las razones que nos puedan explicar el por qué la ciencia formula juicios universales y necesarios, lleva también a explicar las razones que permiten la existencia de sujetos que realizan tales juicios. Es decir, la ciencia formula tales juicios, pero, al mismo tiempo, la ciencia es obra del sujeto. Esto explica el hecho de que Kant, a la hora de analizar la posibilidad de los juicios sintéticos a priori en las ciencias, *entremezcle tal análisis con la estructura cognoscente del sujeto*. Para ello, no habría más remedio que analizar cómo se encuentran estructurados los elementos responsables del conocimiento humano. Por ello, en cuarto lugar estuvo el hecho de explicar cómo el ser humano conoce. Ya que hablamos de la percepción sensorial, que se sostiene en la estética trascendental. Así bien, el sujeto conoce los objetos a través de la intuición empírica, y todo ello que conoce se da dentro de aquello que se denomina formas puras, representaciones que no contienen nada de sensación-materia, y que por ello son intuiciones puras que son a priori, pues están dentro del psiquismo humano y son espacio y tiempo. Sentadas estas bases tenemos el camino libre para sostener cómo se sustenta los juicios sintéticos a priori en la aritmética de

Kant, cómo fue el desarrollo de aquella ciencia y cuánto de la filosofía de la aritmética de Kant, en cuanto sus conceptos y análisis, son realmente válidos.

CAPÍTULO II

Lo que hay en los límites del sentido

Para Kant, analítica significa análisis-división. Es un método encaminado a descomponer el entendimiento con el objeto de hallar en él sus conceptos puros a priori o las categorías.

El entendimiento utiliza los conceptos para realizar juicios. Mediante ellos, el entendimiento conoce el objeto de forma mediata. El sujeto emite juicios producto de conocer los objetos. Así bien, el sujeto conoce mediante juicios, y ellos son la manera que este le da una ubicación a los objetos. Es la manera mediata de representación que el sujeto tiene para con los objetos, porque el sujeto no conoce de manera directa al objeto, ya que es mediante conceptos que se describe al objeto, pero no de manera directa, porque de manera directa es como se hace con la intuición sensible que esta sí es inmediata, porque capta el objeto que es proporcionado a los sentidos.

Si el sujeto conoce mediante juicios, en la forma que se ha señalado, esto también sucede en la aritmética. Tras la aprehensión de sumar, el sujeto emite juicios cada vez que realiza dicha operación. No obstante, dichos juicios universales se enlazan con la categoría de la totalidad, que es una de los conceptos puros del entendimiento.

Así bien, para Kant, los juicios sintéticos a priori en la aritmética están en relación de la denominada cantidad extensiva. Esta es aquella representación de las partes que hace posible la representación del todo. En consecuencia, es la representación de las unidades y es ello que hace posible la obtención de la totalidad de sumandos. Kant sostiene a todo esto como axiomas de la intuición, que si lo queremos, por lo extraño que suene el término *axiomas*, lo podríamos llamar *principios* a partir de los cuales procede la intuición.

La intuición es el elemento a partir del cual al contar nos damos cuenta del mismo de su proceder en el tiempo, y es que según Kant la sucesión del contar se produce en el tiempo. Esto la vemos desde la introducción de la *Crítica*. Sin embargo, explicitamos esto con el segundo modo del tiempo en Kant, la sucesión. Con esto veremos que dicha teoría es viable si tomamos en cuenta la consecución de los números uno a otro y la indiferencia que tiene que un número vaya después que otro al momento de sumar, porque independientemente de esto, el resultado de una suma arrojará lo mismo.

Tras lo mencionado llegaremos a analizar sobre la carta de Schultz por parte de Kant, donde este habla de la construcción de cifras dentro de la aritmética, pues para él esta parte de la matemática posee postulados, juicios prácticos que son inmediatamente ciertos. ¿Cómo sucede esto? Producto de la intuición que hacemos al sumar. Para Kant, el resultado de una suma es el resultado de la continuidad que hacemos de las cifras al sumar o reunirlas unas a otras.

Sentado esto, nuestro punto a sostener en este capítulo será que Kant escogió la suma, que es el primer registro de la aritmética que tuvo la historia de la humanidad. Esto lo percibimos gracias a la carta aclaratoria de Kant sobre Rehberg. Con estas líneas, con la historia de la aritmética y la aparición de los distintos números, naturales, enteros, racionales e irracionales, llegamos a señalar que para Kant no es posible el conocimiento de dichos números antes de los naturales, si no hemos aprendido precisamente estos. Así bien, para nosotros Kant sostuvo las fórmulas numéricas, como él mismo le llama, como 5+7=12, primero, porque son fórmulas simples, son las primeras operaciones dadas y que pertenecen a los números naturales, que sin el aprender de ellas no es posible el aprender de otras más complejas. Segundo, y no menos importante, porque al mostrar que de las primeras se aprende con los sentidos y la razón, el aprender de las otras operaciones es como producto de haber aprendido las primeras. Por lo cual, todo conocimiento parte de la experiencia -del haber aprendido simplemente a sumar en este caso-. Pero no todo se hace con la misma, pues las demostraciones y el proceder de otras operaciones se hacen a partir de demostraciones formales, que para esto se necesita de la aplicación e ingenio de la mente.

1. De la sensibilidad y el entendimiento

En la segunda parte de la *Crítica de la razón pura* encontramos que la ciencia de las reglas a priori del entendimiento es la lógica y a su vez se divide en general y trascendental. La primera es pura y aplicada, y se refiere tanto a los conocimientos racionales puros como empíricos, y además no le preocupa la cuestión del origen del conocimiento puro a priori. Por otro lado, la lógica trascendental se ocupa de las leyes a priori del entendimiento y de la razón (si bien en la medida en que tales leyes se refieren a objetos a priori) y tiene que ver, por lo tanto, con el problema del origen de los conceptos puros a priori del entendimiento. La lógica trascendental se divide en la analítica trascendental y dialéctica trascendental, donde la analítica trascendental trata de los elementos del conocimiento puro a priori (categorías) y se llama analítica de los conceptos. También trata de los principios sin los cuales ningún objeto podría ser pensado y se llama analítica de los principios. Ante lo dicho, cabe indicar que nos centraremos solo en la analítica trascendental y más precisamente en la analítica de los conceptos y en el primer capítulo de la analítica de los principios, ya que aquí encontramos la forma cómo explicitar los juicios sintéticos a priori en la aritmética.

Ahora bien, en el capítulo anterior dijimos que Kant habla de dos fuentes del psiquismo humano: sensibilidad y entendimiento. La sensibilidad es la facultad de recibir representaciones dadas en la intuición; mientras que el entendimiento es la facultad de pensar lo dado en la intuición a través de los conceptos. Tales conceptos son producidos por el entendimiento de modo espontáneo, es decir, a priori. La sensibilidad es la facultad de recibir representaciones, pues, a través de ella se nos da el objeto. Según Kant, la “ciencia” de sus reglas a priori es la estética. Sus elementos son las intuiciones que mediante ellas no nos es posible pensar el objeto dado. Tales intuiciones pueden ser puras o empíricas donde las empíricas se definen por contener sensación y se les denomina como materia del conocimiento sensible; mientras las puras se definen por no contener sensación y se les denomina como forma bajo la cual intuimos el objeto.

El entendimiento es la facultad de conocer un objeto, a través de aquel pensamos el objeto. Según Kant, la "ciencia" de sus reglas a priori es la lógica y sus elementos son los conceptos que a través de ellos no podemos intuir nada. Tales conceptos pueden ser puros o empíricos donde los empíricos proceden de la experiencia; mientras los puros representan la forma bajo la cual pensamos el objeto. Ante lo expuesto, hay que sostener que la sensibilidad y el entendimiento no pueden intercambiar sus funciones, ya que, "tampoco pueden estas dos facultades, o capacidades, trocar sus funciones. El entendimiento no puede intuir nada, y los sentidos no pueden pensar nada" (Kant, 2009, A52-B76).

Como dijimos líneas arriba, todo esto se encuentra vertido en la analítica donde esta significa análisis-división. Esto viene a ser un método encaminado a descomponer el entendimiento con el objeto de hallar en él sus conceptos puros a priori o categorías, pero, ¿cómo se da todo ello? Las intuiciones se basan en afecciones. Los conceptos se basan en funciones. Esto quiere decir que los conceptos tienen la capacidad de ordenar lo diverso en algo común, y tales conceptos tendrían las características de jamás referirse de modo inmediato al objeto, pues eso lo hacen las intuiciones. Sin embargo, los conceptos son utilizados por el entendimiento para realizar juicios.

El entendimiento fabrica de modo espontáneo sus conceptos puros a priori, pero ello no quiere decir que Kant admita la existencia de ideas innatas, como dijimos en el capítulo anterior, ya que sin el material dado en la sensibilidad, el entendimiento no podría producir nada. Pero, entonces, ¿por qué los conceptos elaborados por el entendimiento no proceden de la experiencia, sino que son a priori y puros? El entendimiento utiliza los conceptos para realizar juicios, y es mediante tales juicios que el entendimiento conoce el objeto de forma inmediata. Kant sostiene que en todo juicio existe un concepto que, por un lado, se refiere a muchas representaciones y, por otro, se refiere de modo especial al objeto presente en el juicio. Este objeto se refiere, a su vez, a otros fenómenos. Por ejemplo, en el juicio "todos los cuerpos son divisibles" nos encontramos con que el concepto de divisibilidad se refiere, por un lado, a otros muchos conceptos árbol, silla, gato, hombre, etc., y, por otro lado, se refiere, en este juicio, de un modo concreto al concepto de cuerpo, que a su vez el concepto de cuerpo se está refiriendo a otros fenómenos.

Hasta aquí el concepto no se refiere nunca de modo inmediato al objeto, pues esta función la realiza la intuición. Pero, por otra parte, encontramos que el concepto sí se refiere de modo inmediato al objeto. ¿Pero en qué sentido? En el juicio “todos los cuerpos son divisibles” nos encontramos con que el concepto de divisibilidad se refiere, por un lado, de un modo inmediato al concepto de cuerpo propiamente dicho, y, por otro lado, de un modo mediato a otros muchos conceptos: árbol, silla, gato, hombre, etc. pues también son cuerpos. Entonces, el concepto de cuerpo se está refiriendo, también de un modo mediato, a otros fenómenos.

Del mismo modo, podemos hablar del concepto de suma. Kant estaría de acuerdo si decimos 5+7=12, 12 no hace referencia a 5+7, no hace referencia a la exclusividad que, producto de tener las unidades 5+7, podemos hallar el número 12. No es de ese modo. Sabemos que 8+4; 9+3; 10+2 también podrían darnos doce. Por otro lado, 5 y 7 no hacen referencia únicamente a la exclusividad de las unidades abstractas de 5 y 7. 5 y 7 pueden hacer referencias a ovejas, perros, sillas, mesas, etc.

Ahora bien, según Kant, se podrían reducir todos los actos del entendimiento a la formulación de juicios, donde un juicio implica la descripción de algún tipo de realidad. Esa realidad tiene que representar algún objeto dado a la intuición, pero esa intuición, en cuanto empírica, contiene la materia del objeto y, en cuanto pura, representa el espacio temporal en donde situamos a tal objeto. Si las propiedades de tal objeto son universales y necesarias, por ejemplo, en una figura geométrica, ello se debe a que tanto el espacio como el tiempo son a priori. Pero hay algo más, aunque meramente hemos hecho mención líneas arriba. Hasta ahora nos hemos referido a objetos dados a la intuición, no a objetos pensados a través de la formulación de un juicio. Y es que, según Kant, la formulación de un juicio universal que establece que todo cuerpo es extenso, para poder formular tal juicio, el entendimiento debe haber elaborado el concepto puro de totalidad. En otras palabras, el pensar un objeto es referirse a él a través de un concepto puro del entendimiento. Como del mismo modo que si suprimimos el tiempo y el espacio, nunca podríamos representarnos en la intuición ni el cuerpo ni la extensión. Así también, si suprimimos del entendimiento, por ejemplo, el concepto puro de totalidad, en ningún momento podríamos formular un juicio, es decir, por ejemplo, que todo cuerpo es extenso o que toda unión de 5 y 7 es igual a 12. ¿Por qué? Veamos la relación de los juicios y las categorías.

2. De los juicios y las categorías

Así como en la estética trascendental Kant toma la intuición y la sensibilidad, en la analítica toma el pensar y el entendimiento. Es en base a ello que elabora su teoría que no es más que el ordenamiento de los principios (canon) por el cual Kant intenta darle una salida más segura al tema de las cosas que el ser humano pretende conocer.

Hay que dejar en claro que hay dos formas de conocimiento que se enlazan o ayudan mutuamente. Estas son las representaciones que nos son dadas y las otras son las representaciones que nos son determinadas. Las primeras son representaciones de receptividad de impresiones y las segundas son representaciones espontáneas que son propias de nuestra mente:

> "Nuestro conocimiento surge de dos fuentes fundamentales de la mente, de las cuales la primera es [la de] recibir las representaciones (la receptividad de las impresiones), y la segunda, la facultad de conocer un objeto mediante esas representaciones (espontaneidad de los conceptos); por la primera, un objeto nos es *dado*; por la segunda este es *pensado* en relación con aquella representación ([considerada] como mera determinación de la mente)" (Ídem, A50-B74).

Hechas estas aclaraciones, cabe señalar que la intuición se basa en las sensaciones, mientras los conceptos se basan en las representaciones que son totalmente internas:

> “Intuición y conceptos constituyen, por tanto, los elementos de todo nuestro conocimiento; de modo que ni los conceptos, sin una intuición que de alguna manera les corresponda, ni tampoco la intuición, sin conceptos, pueden producir un conocimiento. Ambos son, o bien puros, o bien empíricos. *Empíricos* cuando una sensación (que presupone la presencia efectiva del objeto) está allí contenida; *puros*, cuando a la representación no se le mezcla ninguna sensación. Se puede llamar a esta última la materia del conocimiento sensible. Por eso, la // intuición pura contiene solamente la forma en la cual algo | es intuido, y el concepto puro contiene solamente la forma del pensar un objeto en general. Únicamente las intuiciones puras o los conceptos puros son posibles *a priori*; los empíricos, solo *a posteriori*” (Ídem, A51-B74-B75).

Ante ello cabe resaltar la razón por la cual Kant desarrolla este análisis. Es porque la analítica, además, de ser un análisis, es una división para poder explicar de manera “cabal” la forma de cómo los objetos nos son conocidos y cómo es el proceder del conocimiento humano.

Para Kant, el sujeto emite juicios sobre los objetos conocidos. No obstante, es el pensar la forma cómo el sujeto conoce. El sujeto conoce mediante juicios y mediante ello es la manera que este le da una ubicación a los objetos. Es la manera mediata de representación que el sujeto tiene para con los objetos. Se dice mediata porque el sujeto no conoce de manera directa al objeto. Es decir, mediante conceptos se describe al objeto, pero no de manera directa, porque de manera directa es como se hace con la intuición sensible que esta sí es inmediata, porque capta el objeto que nos es dado. En la analítica ello cambia, en contraposición con la estética, porque los conceptos que el sujeto emite por su entendimiento van a otro concepto. Por ello la explicación con el concepto de lo que es divisible, pues lo divisible puede llevarnos a un hombre, mesa, árbol, etc. Por ello, Kant es claro al sostener que no podemos de manera inmediata conocer, ir al objeto. Al menos, el pensar de nuestro entendimiento así lo tiene. Y es producto de ello que se tiene que emitir juicios que son cuatro clases: el de cantidad, que a su vez tiene tres universales, particulares y singulares; el de cualidad que son también tres y son afirmativos, negativos e indefinidos; los de relación que son categóricos, hipotéticos y disyuntivos; y los de modalidad que son problemáticos, asertóricos y apodícticos. La explicación es como sigue. Los juicios de cantidad tienen la forma de: todo hombre es mortal (universales), algún hombre es filósofo (particulares) y Emmanuel es filósofo (singulares), cada oración es una ejemplificación de los juicios que se emiten por cantidad. En los de cualidad se da el caso de que toda rosa es perfumada (afirmativos), toda alma no es mortal (negativos) y toda alma es no mortal (infinitos), cada oración es una ejemplificación de los juicios que se emiten por cualidad. Por su parte, los de relación son, en primer lugar, el categórico tiene la forma A es B: este triángulo tiene un ángulo recto; el hipotético tiene la figura si A entonces B, es decir: si la justicia es perfecta tiene que castigar al malo obstinado; y, finalmente, el disyuntivo que tiene como explicación el mundo tiene un comienzo o no lo tiene porque siempre estuvo allí, o tiene una causa que lo produjo o no la tiene si siempre existió tal cual. Por su parte, los juicios de modalidad tienen, en primer lugar, a los problemáticos que se definen como A es posiblemente B, que puede ser ejemplificado como este fruto puede desprenderse hoy de la planta; mientras que los asertóricos son A es realmente B, que puede ser ejemplificado como, este fruto se desprenderá hoy de la planta; y los apodícticos son A es necesariamente B. Este juicio lo podemos representar con el siguiente ejemplo: este fruto ha de desprenderse hoy de la planta. Ante ello, hay algo que a Kant le interesa o se empeña en descubrir, que es que los conceptos que el hombre tiene por dado es producto de una síntesis pura que este hace ante lo diverso que se pueda dar. Es decir, el sujeto mediante su pensar, elabora un conocimiento, lo sintetiza y se vale de su imaginación, que es la parte anímica del alma. Es una función ciega de la que rara vez tenemos conciencia, pero que al final nos proporciona o nos permite captar el conocimiento propiamente dicho, junto con el entendimiento el cual sitúa las categorías, que por cierto con Aristóteles también se llamaban de ese modo, pero que se referían para alcanzar lo "en sí" de las cosas estudiar lo que es, por lo que es, en la medida que es en tanto que es. Para Kant dichas categorías estaban mal estructuradas por que el sujeto no conoce lo en sí, o más aun lo que se representa, sino la apariencia de los objetos que se nos presentan, dicho de otro modo, como hemos venido diciendo, conocemos lo que nosotros ponemos a los objetos. Por ello, en las categorías, Kant sitúa entre lo que es un reconocimiento puro y empírico y lo otro en una relación mutua o solo de experiencia. Sin más, las categorías, que incluyen cuatro clases de concepto del entendimiento, pueden dividirse en dos apartados. El primero se refiere a objetos de la intuición -tanto puro como empírico-. La segunda se refiere a la existencia de esos objetos -sea en su relación mutua, sea en su relación con el entendimiento-. Kant llamaría a la primera clase la de las categorías matemáticas; y a la segunda, la de las categorías dinámicas. Hay que señalar también que la tercera categoría de clase surge de la combinación entre la segunda y la primera. Así, por ejemplo, la totalidad no es más que la pluralidad considerada como unidad; la limitación es la realidad combinada con la negación; la comunidad es el origen de substancias que se determinan causalmente; la necesidad es la existencia que está dada por la posibilidad misma.

Cada una de estas categorías enrola con cada uno de los juicios por una función de correspondencia lógica. Así tenemos que la cantidad en los juicios van con la cantidad de las categorías. Así los universales van con la totalidad de las categorías, los particulares con la pluralidad y los singulares con la unidad. Los juicios de cualidad van con los de cualidad de las categorías. Así tenemos que los afirmativos, negativos e indefinidos van con los de realidad, negación y limitación respectivamente. Los juicios de relación van con las categorías de relación. Así tenemos que los categóricos van con la categoría de inherencia y subsistencia (substantia et accidens). Los juicios hipotéticos van con la categoría de causalidad y dependencia (causa y efecto). Los juicios disyuntivos van con la categoría de comunidad (acción recíproca entre el agente y el paciente). Finalmente, los juicios de modalidad, los problemáticos, asertóricos y apodícticos van con las categorías de posibilidad-imposibilidad, existencia-no existencia, y necesidad-contingencia.

La explicación kantiana es que la representación que el sujeto hace ante lo que conoce lo hace a través de conceptos porque no puede llegar al objeto directamente. Lo hace de manera mediata (el entendimiento así lo maneja) ya que de manera inmediata lo hace por intuición representada espacio-tiempo. Ahora, una pregunta que resulta evidente es ¿cómo se justifica los conceptos puros del entendimiento en la aritmética? La demostración está ensayando una respuesta que podemos extraer dentro de la filosofía del mismo Kant. Si decimos 5+7=12, podemos decir que este es un juicio de cantidad de carácter universal, que se relaciona con la primera división de las tablas de las categorías, la de cantidad, y, dentro de ellas, con la categoría de totalidad. Esto es porque la totalidad de las veces que se sume 5+7 obtendremos siempre 12, y precisamente esto está en referencia a las categorías que Kant sostiene como matemáticas. La razón es que la totalidad, en este caso el número 12, no es más que la reunión de las partes, la reunión de una pluralidad que yace de las unidades 5 y 7 respectivamente. [8] Ambas partes hacen posible el todo. Con respecto a esto último, Kant brinda una exhaustiva explicación en lo que él denomina como los axiomas de la intuición.

3. Sobre los axiomas de la intuición

Según Kant, *todas las intuiciones son cantidades extensivas*. ¿Por qué? Para Kant, todos los fenómenos contienen, según su forma, una intuición en el espacio, y el tiempo, a su vez, se halla *a priori* en la base de estos. No pueden pues ser aprehendidos o recepcionados en la conciencia empírica, sino por medio de la síntesis de lo múltiple, mediante la cual se producen las representaciones de un determinado espacio o tiempo. La conciencia empero de lo múltiple en la intuición en general, en cuanto por ella es posible la representación de un objeto, es el concepto de una cantidad *(quanti).* Así pues, “la percepción [misma] de un objeto, como fenómeno, es posible solamente por medio de esta misma unidad sintética de lo múltiple de la intuición sensible dada, por medio de la cual se piensa

[8] Aquí puede surgir una pregunta a simple vista. Si las categorías se van llenando con los objetos que se encuentran en el mundo sensible, ¿cómo es posible que se llenen con los números, si estos no son objetos sensibles? En realidad, las categorías no solo se llenan con objetos que yacen en el mundo sensible, sino que hace que nos ubiquemos con los objetos en dicho mundo. Así, por ejemplo, las categorías de unidad, pluralidad o totalidad, con ellas podemos ubicar uno, varios o un grupo de objetos en algún lugar o simplemente dentro de un conjunto. No obstante, los números cobrarían también esa función, pues a través de las mencionadas categorías podemos ubicar un uno, varios (reflejados en los números posterior a uno) o el número diez ubicado en un conjunto registrando una totalidad en el mismo. Así pues, las categorías coinciden con los objetos o las categorías coinciden con los números que a su vez podría señalar lícita y expresamente objetos del mundo sensible.

la unidad de la composición de lo homogéneo múltiple en el concepto de una *cantidad*" (Ídem, A162-B203). Es decir, según Kant, los fenómenos son todos ellos *cantidades*, pero *cantidades extensivas,* porque, como intuiciones en el espacio o en el tiempo, tienen que ser representadas por la misma síntesis por la cual el espacio y el tiempo son en general determinados.

Pero, según Kant, ¿qué es una cantidad extensiva? "Llamo cantidad extensiva a aquella en la que la representación de las partes hace posible la representación del todo (y, por consiguiente, precede necesariamente a esta)" (Ídem, A163-B203). Para Kant, no se puede representar una línea, por pequeña que sea, sin trazarla con el pensamiento. Es decir, sin producir todas sus partes poco a poco, desde un punto, y así dibujar esa intuición. Lo mismo ocurre con el tiempo, por corto que sea. Kant piensa que hay un tránsito sucesivo de un momento a otro, por donde todas las partes del tiempo y su adición produjesen una determinada cantidad de tiempo. "Puesto que la intuición, en todos los fenómenos, es o bien el espacio, o el tiempo, por ello // todo fenómeno, como intuición, es una cantidad extensiva, puesto que solo puede ser conocido mediante una síntesis sucesiva (de una parte a otra parte) en la aprehensión" (Ídem A163-B203-B204).

Todos los fenómenos son pues ya intuidos como unos agregados (varias cosas de partes dadas anteriormente), lo cual no ocurre en toda especie de cantidades, sino solo en las que son aprehendidas y representadas por nosotros *extensivamente.*

Así bien, Kant habla de magnitudes (cantidades) *quanta* y magnitudes (cantidades) *quantitas*, de la primera sostiene que la síntesis sucesiva de la imaginación productiva en la creación de figuras, según Kant, fundan la matemática de la extensión, la geometría, -Kant habla de la geometría euclidiana- tal expresa las condiciones de la intuición sensible *a priori,* bajo las cuales tan solo puede *realizarse el esquema* de un concepto puro del fenómeno exterior, por ejemplo: "entre dos puntos no hay más que una recta posible", "dos rectas no encierran un espacio", etc. Estos son los axiomas que se refieren propiamente solo a cantidades *(quanta)* como tales.

De la segunda en lo que se refiere a la cantidad *(quantitas)*, según Kant, no hay para ella axiomas en el sentido propio, aunque varias de esas proposiciones son sintéticas e inmediatamente ciertas *(indemonstrabilia).* Pues la proposición siguiente: cantidades iguales, añadidas o sustraídas a cantidades iguales, dan cantidades iguales, se pueden decir que son analíticas porque tengo inmediatamente conciencia de la identidad de una y otra producción de cantidad. Los axiomas empero han de ser proposiciones sintéticas. No obstante, las proposiciones de relaciones numéricas, si bien son sintéticas por una parte, por ello mismo, no pueden ser llamadas axiomas, sino fórmulas numéricas.

> "Que 7+5=12, no es una proposición analítica. Pues ni en la representación de 7, ni en la de 5, ni en la representación de la composición de ambas, pienso el número 12 (aquí no se trata de que tengo que pensarlo a este en la *adición de los otros dos*; pues en la proposición analítica solo se pregunta si pienso efectivamente al predicado en la representación del sujeto). Pero aunque sea sintética, esta proposición es solo singular. En la medida en que aquí solo se atiende a la síntesis de lo homogéneo (de las unidades), la síntesis aquí solo puede tener lugar de una única manera, aunque el *uso* de estos números, luego sea universal" (Ídem, A164-B205).

Según Kant, cuando se dice: con tres líneas, dos de las cuales juntas son mayores que la tercera, se puede trazar un triángulo, se tiene la mera función de la imaginación productiva, que puede trazar las líneas más largas y más cortas y hacer que se encuentren en todos los ángulos que quiera. En cambio, el número 7 no es posible más que de una única manera y así mismo el número 12, producido por la síntesis del primero con 5. Semejantes proposiciones no deben llamarse axiomas (pues habría infinitos de estos). Por lo cual, solo cabe decir que son fórmulas numéricas.

Este principio transcendental de la matemática de los fenómenos da a nuestro conocimiento *a priori* una gran ampliación. Pues solo él es el que hace que la matemática pura sea aplicable en toda su precisión a objetos de la experiencia, cosa que sin ese principio no se vería por sí misma claramente y hasta ha ocasionado más de una contradicción. Los fenómenos no son cosas en sí mismas. La intuición empírica es solo posible por medio de la intuición pura (del espacio y del tiempo). La síntesis de los espacios y tiempos, como síntesis de la forma esencial de toda intuición, es al mismo tiempo lo que hace posible la aprehensión del fenómeno, toda experiencia externa y, por consiguiente, también todo conocimiento de los objetos de la misma. Es decir, lo que la matemática, en su uso puro, demuestra de aquella (forma), vale también necesariamente para esta (experiencia externa).

> “Todas las objeciones contra eso son solamente argucias de una razón mal // instruida, que erróneamente pretende liberar a los objetos de los sentidos, de la condición formal de nuestra sensibilidad, y, aunque no sean meros fenómenos, los representa como objetos en sí mismos, dados al entendimiento; en cuyo caso no se podría, por cierto, saber nada a priori de ellos sintéticamente, […]” (Ídem, A166-B207)

Recapitulando, Kant entiende por magnitud el hecho de tener conciencia de la diversidad homogénea. Ello quiere decir que únicamente se puede subsumir el fenómeno en una conciencia que sea capaz de sintetizar lo diverso y tener conciencia de ello mismo en la realización de la unidad sintética de tal diversidad. La conciencia de esta diversidad es lo que posibilita la existencia de la cantidad extensiva. Es decir, tal conciencia de la diversidad pueda saber a priori que la representación de las partes posibilita la representación del todo. Ello sucede, por ejemplo, en la representación del tiempo (el cual es un todo que cuenta con diversos momentos) y del espacio (el cual es un todo que consta de puntos). Pues bien, dado que el espacio y el tiempo son quienes posibilitan la intuición de todos los fenómenos (tanto internos como externos), estos necesariamente tienen que tener, en la intuición, cantidad extensiva. Gracias a ello, el entendimiento posee un principio puro a priori que le permite saber que toda intuición tiene que ser necesariamente extensa. Es decir, que, siendo una, es, a su vez, diversa (un todo que capta las partes y que mediante las partes puede dar cuenta del todo).

4. Sobre el modo del tiempo: de la sucesión

"La experiencia es posible solo mediante la representación de una conexión necesaria de las percepciones" (Ídem, B219). Ahora bien, tal conexión solamente es posible si los objetos se combinan en el tiempo. Ello hace necesario examinar, según Kant, lo que denomina como modos del tiempo - permanencia, sucesión, simultaneidad - lo que dará lugar a la descripción de tres analogías de la experiencia relacionadas con cada uno de esos tres modos del tiempo. El que nos interesa, para los fines de esta tesis, es el segundo modo del tiempo: la sucesión.

El segundo modo del tiempo establece que el entendimiento sabe a priori que "*todas las alteraciones suceden según la ley de la conexión de la causa y el efecto*" (Ídem, A189-B232).

Los cambios, a los que se refiere este segundo modo del tiempo, no son otra cosa que los fenómenos de la sucesión temporal. Toda modificación (sucesión) de los fenómenos no es más que un cambio. No obstante, "el principio de la relación causal en la sucesión de los fenómenos vale también para todos los objetos de la experiencia (bajo las condiciones de la sucesión), porque él mismo es el fundamento de la posibilidad de tal experiencia" (Ídem, A202- B247). Así, "el tiempo entre la causalidad de la causa y su efecto inmediato puede ser *evanescente* (por tanto, ambos pueden ser simultáneos), pero la relación de la una respecto a la otra sigue siendo siempre, sin embargo, determinable según el tiempo" (Ídem, A203- B248).

> "A mi juicio, el argumento de la segunda Analogía debe establecerse de la siguiente manera. La primera premisa es que percibimos qué "aparición seguir uno al otro, es decir, que hay un estado de cosas a la vez, lo contrario de lo que era en el momento anterior" (B233). La segunda premisa es tiempo de orden, un evento o un evento de estado que tiene lugar antes [o] (después) que otro, […] Lo que se necesita es un criterio empírico de tiempo de orden. La tercera premisa, es que el mero fin de nuestras percepciones no proporciona un criterio empírico adecuado. Un criterio adecuado debe ser objetivo, así como antiguamente empírico, y "la relación objetiva de apariciones que siguen una sobre otra

> no se ha determinado a través de la mera percepción"(B234)" (Brittan, 1978, p. 170).[9]

En principio, la sucesión temporal (base de los cambios fenoménicos) es percibida por el sujeto gracias a la existencia de la imaginación. Esta es quien enlaza las percepciones sucesivas en el tiempo.

Según Kant, lo que sucede es que el enlace llevado a cabo por la imaginación únicamente implica saber que una cosa va antes y otra va después, pero no que un fenómeno preceda a otro. En otras palabras, "solo soy consciente de que mi imaginación coloca un [estado] antes, y el otro después; no de que un estado preceda al otro en el objeto" (Kant, 2009, B234). Así bien, a todo conocimiento empírico corresponde, por medio de la imaginación, una síntesis de lo diverso. Es decir, es una reunión de todos los eventos, pero dichos eventos siempre son sucesivos. Ahora bien, en la imaginación no está preestablecido, en lo que al orden de secuencia se refiere, qué es lo que debe preceder y qué es lo que ha de seguir. Por ejemplo, según Kant, cuando contemplo una casa, mis percepciones, podrían empezar por la aprehensión del tejado y finalizar con la del suelo, así como por abajo o por arriba, de derecha a izquierda o de izquierda a derecha. No hay ningún orden preestablecido. Estamos ante una sucesión meramente subjetiva, la cual, al ser completamente arbitraria, no demuestra nada. Sin embargo, "un barco que desciende la corriente, mi percepción de su posición más abajo, sigue a la percepción de la posición del barco más arriba en el curso del río; y es imposible que en la aprehensión de este fenómeno el barco sea percibido primero más abajo, y después más arriba" (Ídem, A192-B237). En este caso, el orden está predeterminado y ligado necesariamente a ese orden. La sucesión, en este caso, es objetiva. Esta consiste en aquel orden de la diversidad

[9] "In my view, the argument of the second Analogy should be set in the following way. The first premise is that we perceive that "appearances follow one another; that is, that there is a state of thing at one time the opposite of which was in the preceding time" (B233). The second premise is time-order, one event or event-state taking place earlier (later) than another, […] What is needed is an empirical criterion of time-order. The third premise is that the mere order of our perceptions does not provide an adequate empirical criterion. An adequate criterion must be objective as well as merely empirical, and "the objective relation of appearances that follow upon one another is not to be determined through mere perception" (B234)".

del fenómeno, en virtud de la cual la aprehensión de una cosa (lo que sucede) sigue a la aprehensión de otra cosa (lo que precede) de acuerdo con una regla.

Así bien, llegamos a entender la sucesión en la aritmética, al partir de aquello tan famoso que se dice “el orden de los factores no altera el producto”. Pero esto es respecto a la multiplicación, pues aquí se habla de factores y productos. No obstante, lo que nos interesa es el principio casi similar que yace en la suma y que dice “el orden de los sumandos no altera la suma”. Es decir, “el orden de los sumandos no altera el total”. Podemos colocar el 5 por delante o el 7, y en ambos casos, sea el orden que sea, la reunión de ambos números siempre será 12. No existe, en este caso, un orden establecido para hallar dicho total 12. Sin embargo, lo asumimos de forma objetiva la unión de 5 y 7 independientemente del orden. Pese a ello, hay que tener en cuenta que dicha objetividad está mezclada de una subjetividad. Primero, cuando aprendemos a sumar, es nuestra vista la que da cuenta de dicha suma. Segundo, es nuestra mente que procesa dicha información, que, pese a que después de ese momento de estar plasmada dicha información, en el momento que se quiere utilizar se recurre a la imaginación junto con el entendimiento y la experiencia para contrastar que no nos hemos equivocado. Dicho contraste lo hacemos y vemos de forma sucesiva hasta la contrastación de dicho total.

5. Los argumentos que complementan la exposición de los juicios sintéticos a priori en la aritmética de la *Crítica de la razón pura* (carta a Johann Schultz)

Una de las más importantes cartas sobre la filosofía de la aritmética que Kant haya escrito y discutido a un contemporáneo suyo es aquella que data del 25 de noviembre de 1788. El autor, a quien está dirigida la carta, es Johann Schultz.[10]

[10] *“En la carta a Marcus Herz del 21 de febrero de 1772, Kant describió a Johann Schultz (1739-1805), predicador de la corte y profesor de matemáticas en Königsberg, como “la mejor cabeza filosófica que conozco en nuestra región”. Este “buen pastor” Schultz —como también lo llama en esa carta— publicó*

Kant pretende en la misma saldar la cuestión de que en la aritmética existen juicios sintéticos a priori y no juicios analíticos

> “Permítame, por tanto, que traiga a colación algunas dificultades sobre la afirmación, opuesta a mi tesis, según la cual la aritmética no contiene conocimientos sintéticos *a priori*, sino meramente analíticos.
>
> La aritmética general (álgebra) es una ciencia de tal modo *ampliativa* que no cabe citar ninguna otra de las ciencias racionales que se le equipare en este respecto, e incluso las restantes partes de la *mathesis* pura esperan su crecimiento en gran parte de la ampliación de aquella doctrina general de la cantidad. Así, pues, si esta constara de meros juicios analíticos, entonces al menos la definición de estos últimos, según la cual serían juicios meramente explicativos, sería incorrecta, y entonces habría un problema importante y difícil de responder: ¿cómo es posible la ampliación del conocimiento *mediante meros juicios analíticos*?” (Kant, 2004b, p. 50).

Según Kant se puede formar un concepto de una y la misma cantidad por medio de muchas adiciones y sustracciones diferentes. No obstante, ambos de estos procesos son las síntesis. Para Kant, objetivamente, los conceptos que se forman son idénticos (como en cada ecuación), pero, subjetivamente, en función del tipo de combinación (*Zusammensetzung*), sería que, con el fin de llegar a ese concepto, son muy diferentes. De tal forma que el juicio va más allá del concepto que se recibe de la síntesis. Así la sentencia sustituye otro concepto (más simple y más apropiado para la construcción) en lugar del primer concepto, a pesar de que determina el mismo objeto. “Así puedo yo llegar mediante 3 + 5, mediante 12 - 4, mediante 2 x 4, mediante 2^3 a una única determinación de una cantidad = 8. Pero en mi pensamiento de 3 + 5 no estaba contenido en absoluto el pensamiento de 2 x 4; por tanto, tampoco el concepto de 8, que tiene en ambos el mismo valor” (Ídem, pp. 50-51).

una de las primeras reseñas, si no la primera, de la Dissertatio *de 1770. Por indicación del propio Kant, convirtió sus observaciones sobre la* Crítica de la razón pura *en un libro, que vio la luz en 1784 con el título de* Aclaraciones sobre la Crítica de la razón pura del señor profesor Kant, *convirtiéndose así en el primer defensor de la filosofía crítica. En 1789 publicó la primera parte de su nueva obra* Examen de la crítica kantiana de la razón pura. *Antes de entregar el manuscrito a la imprenta, lo sometió al juicio de Kant, el cual le dio su parecer en una carta fechada el 25 de noviembre de 1788,* [...] *A la afirmación de Schultz según la cual “la aritmética no contiene conocimientos sintéticos* a priori, *sino meramente analíticos”, Kant opone en esta carta nuevos argumentos a favor del carácter sintético de los juicios aritméticos, que completan los expuestos en su obra principal*” (Kant, 2004b, p.49).

Ciertamente, para Kant, la aritmética no tiene axiomas, ya que su objeto no es realmente ningún *quantum*. Es decir, ningún objeto cuantitativo de la intuición, sino más bien de la cantidad como tal. En otras palabras, Kant considera ello como el concepto de una cosa en general por medio de la determinación cuantitativa.

Así bien, la aritmética para Kant posee postulados, es decir, juicios prácticos que son inmediatamente ciertos. Porque si uno mira 3 + 4 como la fijación de un problema, sucede que se va a encontrar un tercer número, es decir, (7) de manera que este número será visto como el *complementum ad totum* de 3 + 4. Así pues, según Kant, la solución se encuentra por medio de la operación más simple, que no requiere prescripción especial, ya que, por la adición sucesiva que el mismo número 4 propone, simplemente es como una continuación del contar hasta 3. La sentencia "3 + 4 = 7" hace parecer que hay un juicio puramente teórico, y considera objetivamente, eso es lo que es; pero subjetivamente, el "+" significa la síntesis que implica el conseguir un tercer número a partir de estos otros dos números, y significa una tarea a realizar, que no requiere de instrucción o prueba. En consecuencia, el juicio es un postulado.

Con esto Kant quiere llegar a mostrar que en la aritmética no existen juicios analíticos sino sintéticos a priori, ya que de lo dicho el:

> "[…] supuesto que fuera un juicio analítico, entonces debería *pensar* exactamente lo mismo en 3 + 4 que en 7, y el juicio solo me haría consciente de mi pensamiento de un modo más claro. Pero, como 12 - 5 = 7 da un número = 7, en el que pienso realmente justo lo mismo que lo que pensaba antes en 3 + 4, entonces, según el principio *eadem uni tertio sunt eadem inter se* [lo que son iguales a un tercero son iguales entre sí], cuando pienso 3 y 4, pensaría a la vez 12 y 5, lo cual repugna a la conciencia" (Ídem, p. 51).

Según Kant, todos los juicios analíticos por medio de conceptos tienen esta característica: pueden representar un predicado solo como un concepto constituyente contenido en el concepto de sujeto. En el caso de las definiciones, ambos conceptos deben ser *conceptus reciproci*.

En el juicio aritmético, que por cierto Kant denomina ecuación, ambos conceptos deben ser absolutamente recíprocos y objetivamente idénticos, por ejemplo, los conceptos de "3 + 4" y "7". El problema de juntar 3 y 4 en un número, el número 7 no debe surgir de un análisis de los conceptos constituyentes sino más bien por medio de una construcción, es decir, sintéticamente. Esta construcción, el solo conteo en una intuición a priori, presenta el concepto de la conjunción de dos números. Así "en este caso no se construye el concepto de un *quantum*, sino el de la [*quanta*]. Pues era un mero pensamiento el que 3 y 4, como otros tantos conceptos de cantidad, reunidos pudieran dar el concepto de *una* cantidad, pero el número siete es la exposición de este concepto en un acto de contarlos juntos" (Ídem, 51). En otras palabras, para Kant se construyen las cantidades (*quanta*) no la cantidad (*quantum*) en este caso 3 y 4 cada uno es una cantidad (*quantum*) de los cuales podemos obtener bajo la suma el número 7 que es (*quanta*) cantidades, en otras palabras, "*quantum* + *quantum* = *quanta*".

Kant también tiene algo muy importante que mostrarnos sobre el tiempo, y es que este no tiene influencia en las propiedades de los números (en aquello que se considera como determinaciones puras de cantidad), como sí puede tener en la característica de todo cambio (de cantidad), que solo son posibles con relación a un estado específico del sentido interno y su forma (tiempo). La ciencia de los números, a pesar de la sucesión de que toda construcción de cantidad requiere, es una síntesis intelectual pura, que nos representamos en el pensamiento. Pero en la medida en que las específicas cantidades (quanta) se determinan de conformidad con esta ciencia, es ahí donde entramos a tallar nosotros y, siendo de ese modo, somos nosotros quienes podemos comprender sucesivamente su intuición; y por lo tanto esta comprensión se somete a la condición de tiempo. Así que en tanto todo está dicho y hecho, no podemos someter cualquier objeto que no sea un objeto de una posible intuición sensible, la evaluación numérica, y por lo tanto sigue siendo un principio "[…] sin excepción el que la matemática se aplica solo a los *sensibilia*" (Ídem, p. 52).

6. Los argumentos de Kant de por qué existen juicios sintéticos a priori en la aritmética (carta a Wilhelm Rehberg)[11]

“Si el entendimiento tiene el poder de crear números a voluntad, ¿por qué es incapaz de pensar √2 en números?” (Kant, 1999a, II: 207) fue una pregunta que tan osadamente le hizo Rehberg a Kant en el año de 1790 con el fin de refutar la inexistencia de los juicios sintéticos a priori en la aritmética.

La respuesta ante dicha objeción en una carta fechada del 25 de septiembre de 1790 es que, por una parte, “puedo considerar cada número como el producto de dos factores, aunque estos factores no son inmediatamente entregados a mí o incluso si no se podría decir en los números” (Ídem, II: 207). Inmediatamente se continúa con la respuesta y se dice: “Porque, si el número dado es 15, puedo tomar uno de los factores como el 3, por lo que el otro es 5, y 3 X 5 = 15 o dejar que el factor dado sea 2; a continuación, el segundo factor se busca es 15/2” (Ídem, II: 207).

Si desarrollamos la demostración que Kant pretende sustentar tenemos lo siguiente:

Proposición 1: Todo número natural puede expresarse como el producto de dos factores.

Ejemplo 1. Proporcionamos el número 15

Se puede tomar como uno de sus factores el número natural K_1, el otro factor se obtiene fácilmente.

[11] Queremos agradecer a nuestros compañeros del doctorado de filosofía de la promoción 2013-2014, nos referimos a los catedráticos de la Facultad de matemática de la UNMSM, Víctor Osorio y Adrián Aliaga. El primero por facilitarnos material bibliográfico sobre la historia de la aritmética y el segundo por todas las clases de aritmética que nos brindo sin nada a cambio durante todo el semestre 2014-II. Sin ellos no hubiese sido posible tener el soporte teórico de la aritmética para la presente tesis, en especial en lo que respecta a este subcapítulo y al próximo (6 y 7) de este nuestro segundo capítulo.

Si $K_1 = 1$, entonces el otro factor es $K_2 = 15$, pues:

$$K_1 . K_2 = 1 \times 15 = 15$$

Si $K_1 = 2$, entonces el otro factor es $K_2 = \frac{15}{2}$, pues:

$$K_1 . K_2 = 2 \times \frac{15}{2} = 15$$

Si $K_1 = 3$, entonces el otro factor es $K_2 = \frac{15}{3}$, pues:

$$K_1 . K_2 = 3 \times \frac{15}{3} = 15$$

.
.
.
.
.

Si $K_1 = n$, entonces para calcular el otro factor será $K_2 = \frac{15}{n}$, pues:

$$K_1 . K_2 = n . \frac{15}{n} = 15$$

Se puede proceder de esta forma, "o dejar que el primer factor sea la fracción 1/7 el otro factor es de 105, y así sucesivamente. Así, es posible, dado cualquier número como producto y teniendo en cuenta uno de sus factores, para encontrar el otro factor" (Ídem, II: 207).

Es decir, Kant hace referencia a esto: $\frac{1}{7} \times 105 = 15$

Observación: La observación nace producto del análisis vertido al desarrollar los ejemplos de Kant.

En el ejemplo 1 tomamos el factor K_1 para ser un número natural n. Podemos proponer un factor racional y el otro se calcula y la proposición 1 se verifica.

Ejemplo: Tomaremos un factor $K_1 \in Q$ (racional).

Si $K_1 = \frac{1}{2}$ entonces $K_1 . K_2 = 15$ y $\frac{1}{2} . K_2 = 15$

de donde $K_2 = 30$

Luego:

$K_1 \,.\, K_2 = \frac{1}{2} \times 30 = 15$

Si $K_1 = \frac{3}{7}$ entonces $K_1 \,.\, K_2 = 15$ y $\frac{3}{7} \times K_2 = 15$

de donde $K_2 = \frac{7 \times 15}{3} = 35$

Luego $K_1 \,.\, K_2 = \frac{3}{7} \times 35 = 3 \times 5 = 15$

Si $K_1 = \frac{-5}{8}$ entonces $K_1 \,.\, K_2 = 15$ y $\frac{(-5)}{(8)} \times K_2 = 15$

de donde $K_2 = \frac{8 \times 15}{-5} = \frac{8 \times 15}{-5} = -24$

Luego

$$K_1 \,.\, K_2 = \left(-\frac{5}{8}\right)(-24) = \frac{5 \times \overset{3}{24}}{\underset{1}{8}} = 15$$

De esta demostración entonces, podemos derivar el siguiente corolario: En general, dado un número como producto y conociendo uno de sus factores, es fácil calcular el otro factor.

Por otro lado, Kant brinda una segunda respuesta con su propósito de seguir argumentando: “Si ninguno de los factores se da, sino solo una relación entre ellos, por ejemplo, se da que son iguales-por lo que tenemos a y el factor buscado es x, donde i: x = x: a (es decir, x es la media proporcional entre 1 y a). Luego, desde a = x^2, x debe = √a. Es decir, la raíz cuadrada de una cantidad dada, por ejemplo, √2, se expresa por la media proporcional entre 1 y el número dado (en este caso, 2). Así, también es posible pensar números tal como ese uno” (Ídem, II: 208).

Observación: Otro caso que se presenta es el de calcular los factores de un número si conocemos el número y una relación R entre sus factores. Esto es, dado un número a y una relación R entre sus factores, se calcula estos. Bajo estas premisas, desarrollemos y analicemos la segunda respuesta del propio Kant.

Si K_1 R K_2 entonces $K_1 . K_2 = a$

Proposición 2. Sean:

a : número dado

R : "igual a", relación entre los dos factores de a.

Entonces: $a = x . x$

ó $\sqrt{a} = x$

El factor buscado es un número irracional.

Prueba

1. Como R: "es igual a" es una relación entre los factores buscados, podemos formar una proporción geométrica entre 1 y a. Esto es:

$$1 : x = x : a$$

$$\text{ó} \quad \frac{1}{x} = \frac{x}{a}$$

2. El factor buscado es media proporcional entre el número dado a y la unidad, y tenemos (producto de los medios es igual al producto de los extremos):

$$1 . a = x . x$$

$$a = x . x$$

El modo dado se expresa como el producto de dos factores iguales. Así se puede establecer el siguiente corolario.

Corolario

$$1.\ \text{Como}\quad a = x^2 \quad \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\ 1$$
$$\text{o}\quad \sqrt{a} = x$$

Se tiene que el valor buscado es el número racional $\sqrt{a}$ y verifica 1, pues

$$\sqrt{a} \,.\, \sqrt{a} = x \,.\, x$$
$$a = x^2$$

Ejemplo: Expresar el número 2 como el producto de dos factores iguales.

Tenemos que:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{2}$$

de donde

$$1 \,.\, 2 = x \,.\, x$$
$$2 = x^2$$
$$\sqrt{2} = x$$

Luego los factores buscados para el mismo 2 son

$$K_1 \div \sqrt{2} = K_2$$
$$K_1 \,.\, K_1 = \sqrt{2} \,.\, \sqrt{2} = 2$$

Así bien Kant llega a la demostración de por qué el entendimiento es capaz de pensar $\sqrt{2}$, en números:

> "La geometría nos muestra, por el ejemplo de la diagonal de un cuadrado, que la cantidad media proporcional entre las cantidades 1 y 2 pueden ser encontradas y que $\sqrt{2}$ es en consecuencia no un concepto vacío, sin objeto. Por lo tanto, la pregunta es solo, por qué no se puede encontrar un número de esta cantidad, un número cuyo concepto

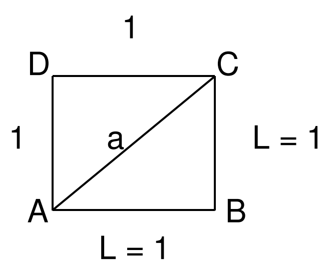
representaría la cantidad (su relación con la unidad) clara y completa" (Ídem, II: 208).

Observación

1. La geometría nos muestra que el número irracional √2, por ejemplo, no es un concepto vacío.

> "Me parece que el rompecabezas sobre el significado proporcional, que el autor incisivamente cuestiona es la adecuación de nuestros poderes imaginativos para ejecutar los conceptos que el entendimiento ha descubierto de la aritmética, se basa realmente en la posibilidad de una construcción geométrica de tales cantidades, cantidades que nunca puede ser completamente expresada en números" (Ídem, II: 210).

Así bien, si tomo un cuadrado unitario tal como el de la figura.



Considerando el triángulo rectángulo ABC, por el teorema de Pitágoras tendremos que:

$$d^2 = L^2 + L^2 = 1^2 + 1^2 = 2$$
$$d = \sqrt{2}$$

El número irracional √2 representa la longitud de la diagonal del cuadrado unitario.

2. Otra manera de interpretar √2, es afirmando que la diagonal del cuadrado unitario es media proporcional entre los números 1 y 2.

En efecto:

$$\frac{1}{d} = \frac{d}{2}$$

o $$d^2 = 1 . 2 = 2 \rightarrow d = \sqrt{2}$$

> “Para el desconcierto que uno piense sobre √2 no me parece que es producido por la propuesta de que, para cada número, se puede encontrar una raíz cuadrada que, si no es en sí un número, es lo más cerca de una regla para aproximar la respuesta como uno quiera. Lo que confunde la comprensión es más bien el hecho de que este concepto √2 se puede construir geométricamente, de modo que no es meramente pensable sino también adecuadamente visualizable, y el entendimiento es incapaz de ver la base de este. La comprensión no es ni siquiera en condiciones de asumir la posibilidad de un objeto √2, ya que no puede presentar adecuadamente el concepto de una cantidad tal como en una intuición de número, e incluso menos anticiparía que una cantidad tal se podría dar a priori” (Ídem, II: 210).

Así bien, en esta carta vemos algo que Kant ha venido insistiendo desde la *Crítica de la razón pura*: todo número siempre es de carácter intuitivo y su construcción es una sucesión en el tiempo.

> “La necesidad de combinar las dos formas de la sensibilidad, el espacio y el tiempo, en la determinación de los objetos de nuestra intuición, para que el tiempo, cuando el sujeto se hace objeto de su representación, debe ser imaginado como una línea, si ha de ser cuantificado, así como, por otro lado, una línea puede ser cuantificada por ser construida en el tiempo - este conocimiento concerniente a la necesaria combinación del sentido interno con sentido externo, incluso en la determinación temporal de nuestra existencia, me parece ayudar a probar la realidad objetiva de nuestras representaciones de las cosas externas (como contra [frente] el idealismo psicológico)[…]” (Ídem, II: 210).

Finalmente, en esta carta vemos algo muy importante que remarcar:

> “La siguiente consideración muestra que lo que se necesita para el concepto de la raíz cuadrada de un número definido, por ejemplo, 15, no es el mero concepto de un número, proporcionado por la comprensión,

> sino más bien una síntesis en el tiempo (como pura intuición): desde el mero concepto de un número, no podemos decir si la raíz de ese número será racional o irracional" (Ídem, II: 209).

La pregunta aquí será ¿a qué se denomina número racional e irracional? ¿Existen otro tipo de números? ¿Qué pensaría Kant sobre ello con todo lo expuesto en su filosofía y por supuesto hasta aquí sentado?

7. Sobre los números y lo que Kant pensaría de los mismos

La aparición de los números ha generado tantas opiniones como la cantidad de números que podamos contar. Así bien, se dice por ejemplo que:

> "Cantor había citado ya, en las discusiones provocadas por sus trabajos, páginas curiosas por su ingenuidad, sacadas de la obra de Bertrand de Ginebra: *Développement nouveau de la partie élémentaire des mathématiques*, *prise dans toute son étendue* […] En los comienzos, los hombres fueron cazadores o pastores, estos últimos fueron los que primero tuvieron ocasión de contar; les importaba no perder sus animales y para esto era necesario asegurarse por la noche de que todos habían vuelto al corral; el que no hubiera tenido más que cuatro o cinco, hubiera podido ver de un golpe de vista si todos habían vuelto, pero un golpe de vista no hubiera bastado al que hubiera tenido veinte. Mirando pues a sus bestias volver unas detrás de las otras, habría imaginado una sucesión de un número de palabras semejante al de los animales y, conservando esas palabras en su memoria, las habría repetido al día siguiente, a medida que las bestias hubieran ido volviendo; a fin de estar seguro, si hubiesen cesado de entrar antes de que hubiese terminado sus palabras, de que tantas palabras como le faltara pronunciar, tantos serían los animales que le faltaban" (Brunschviccg, 1945, 501).

Sentado esto, se sostiene de inmediato que "la *hipótesis ideológica* puede ser hoy conservada bajo la forma de *tesis sociológica*". (Ídem, 501). Sin embargo, no podemos tomar de forma ligera semejante opinión porque cuánta agua habría corrido luego de dicha opinión. No obstante, lo que sí podemos tomar como sentado son las diferentes opiniones sobre la aparición de los números como, por ejemplo, la de "podemos suponer, sin gran peligro de equivocarnos, que el sentimiento, e incluso el egoísmo de la propiedad, es lo que ha engendrado la necesidad de contar. Tal vez el primer hombre que contó quiso asegurarse de que no le había robado un animal de su manada, o una fruta de su cosecha". (Pellertier, 1958, p. 11)

Antes de que surgieran los números para la representación de cantidades, el hombre usó otros métodos para contar, utilizando para ello objetos como piedras, palitos de madera, nudos de cuerdas, los dedos, entre otras cosas que le fueran útiles para dicha tarea. Más adelante, comenzaron a aparecer los símbolos gráficos como señales para contar, por ejemplo marcas en una vara o simplemente trazos específicos sobre la arena.

> "Todo empezó con pequeñas fichas de arcilla, hace 10.000 años en el Próximo Oriente. Incluso entonces, los contables ya estaban registrando quién era el propietario de qué, y de cuánto; incluso si todavía no se había inventado la escritura y no había símbolos para los números. En lugar de símbolos numerales, aquellos contables antiguos utilizaban pequeñas fichas de arcilla. Unas eran conos, otras eran esferas y otras tenían forma de huevos. Había cilindro, discos y pirámides. La arqueóloga Denise Schhmandt-Besserat dedujo que estas fichas representaban productos básicos de la época. Las esferas de arcilla representaban fanegas de grano, los cilindros representaban animales, los huevos jarras de aceite. Las fichas más antiguas datan del 8000 a. C. y fueron de uso común durante 5.000 años.
>
> Con el paso del tiempo, las fichas se hicieron más elaboradas y más especializadas. Había conos decorados para representar cerveza. Schmandt-Besserat se dio cuenta de que estas fichas eran mucho más que un artífico de contabilidad. Eran un primer paso vital en el camino hacia los símbolos numerales, la aritmética y las matemáticas" (Stewart, 2008, p.12).

"Estas marcas de arcilla no eran ni mucho menos los más antiguos ejemplos de escritura numeral, pero todos los ejemplos anteriores son poco más que rayas, "marcas de cuenta", que registran números como una serie de trazos, tales como ||||||||||||| para representar el número 13" (Ídem, p. 14).

Pero, bajo dichas circunstancias, ¿qué movió al hombre a realizar todo esto? Y, más aún, ¿cuál fue el método empleado?

> "El método empleado es la correspondencia objeto por objeto. El hombre que, deseando saber si tenía más o menos frutas que su vecino, tuvo la idea de hacer una marca en una de las suyas, luego otra en una de su vecino, y continuar hasta que una de las colecciones se agotase, fue el primero que *contó*. Este procedimiento tan sencillo contiene la primera propiedad de los números enteros: formar una sucesión ilimitada; pero no había nacido la *idea del número*". (Pellertier, 1958, p. 12)

Fue en Mesopotamia, alrededor del año 4.000 a. C., donde aparecen los primeros vestigios de los números, que consistieron en grabados de señales en formas de cuñas sobre pequeños tableros de arcilla, empleando para ello un palito aguzado; de aquí, el nombre de escritura cuneiforme. Este sistema de numeración fue adoptado más tarde, aunque con símbolos gráficos diferentes, en la antigua Grecia y en la antigua Roma. En la Grecia antigua se empleaban simplemente las letras de su alfabeto, mientras que en la antigua Roma, además de las letras, se utilizaron algunos símbolos. En consecuencia,

> "la matemática, como todas las ciencias tuvo un origen exclusivamente experimental. Las primeras adquisiciones matemáticas de los antiguos Egipcios y Caldeos y de los comerciantes Fenicios, tuvieron un carácter práctico, reduciéndose a un conjunto de reglas inconexas sobre hechos aritméticos o geométricos observados, todos de utilidad inmediata" (Silva, 2000, p. 10).

Es más, pese a que "durante un cierto tiempo se pensó que la matemática se refería directamente al mundo de nuestra experiencia sensible, y solo en el siglo XIX se liberó la matemáticas pura de las limitaciones que implican las observaciones de la naturaleza. Está totalmente claro, no obstante, que la matemática apareció originariamente como parte de la vida diaria del hombre, […]" (Boyer, 1987, p. 19), Pero la pregunta que corresponde en este tramo es: ¿cómo aparecieron los números conocidos por todos hoy en día? Para fines de esta tesis nos corresponde revisar la aparición de los números naturales hasta los números irracionales, pues, todos estos son los que trabajó Kant.

Los números naturales

Los números naturales (designados con una letra **N**) son un conjunto compuesto por cualquiera de los números que se usan para contar los elementos de un conjunto. Un número natural es un número positivo y se presenta como: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; etc. Reciben ese nombre porque fueron los primeros que utilizó el ser humano para la enumeración.

¿Cómo aparecen los números naturales? La respuesta en parte se ha dado líneas arriba en la aparición de los números, pero cabe hacer mención que el nombre mismo va bajo la siguiente forma: dentro de los números naturales solo podemos realizar con *libertad* dos operaciones: suma y multiplicación. No podemos restar, por ejemplo, no podemos hacer (2) – (5) = (-3), porque (-3) no es número natural. Lo mismo, no podemos dividir 3/5 = 0.6, pues 0.6 no pertenece a los números naturales. En consecuencia, solo puede realizarse dos operaciones con suma libertad: una es la suma y la otra es la multiplicación. La resta y la división, en parte, mas no totalmente, tienen sus respectivas restricciones.

En consecuencia, este conjunto de los naturales se extiende, porque no podemos restar con total libertad, pues, esta operación está restringida al caso en el que el minuendo es mayor o igual que el sustraendo. Es decir, existe la diferencia. Podemos hablar de restar siempre y cuando el minuendo es mayor e igual que el sustraendo. No existe la diferencia en los naturales siempre que el minuendo es menor que el sustraendo. Como el caso, por ejemplo, (3) – (5) el minuendo es menor que el sustraendo. Entonces, no existe la diferencia en los naturales. Este problema de la sustracción nos lleva a extender los naturales a otro conjunto donde se puede restar con toda libertad.

Los números enteros

Los números enteros (designados con una letra **Z**) son un conjunto de números que incluye a los números naturales distintos de cero (1; 2; 3;…), los negativos de los números naturales (…; –3; –2; –1) y al cero (0). Los enteros negativos, como –1 o –3 (se leen “menos uno”, “menos tres”, etc.), son menores que todos los enteros positivos (1; 2;...) y que el cero.

¿Por qué y cómo aparecen los números enteros? La restricción de la resta o de la sustracción nos exige una extensión de los naturales a otro conjunto donde sea posible restar con libertad. Este conjunto se llama el conjunto de los números enteros. Si representamos los números naturales van a tener así, 1; 2; 3; 4; pero, si le incluimos sus opuestos simétricos, vamos a tener el -1; -2; -3; -4. Toda esta representación viene a ser el conjunto de los enteros, donde se encuentran los enteros positivos y los enteros negativos. En consecuencia, los números naturales están contenidos en los números enteros. Si tenemos el conjunto de los naturales, dicho conjunto estará en el conjunto de los enteros. En dicho conjunto de los enteros podemos sumar, multiplicar y restar con total libertad, mas no dividir con total libertad. Por lo cual, aparece la mención de los números racionales.

Los números racionales

Los números racionales (designados con una letra **Q**) son todo número que puede representarse como el cociente de dos números enteros (más precisamente, un entero y un natural positivo). Es decir, una fracción común a/b con numerador a y denominador b distinto de cero.

Ejemplos:

Fracciones: ½; -6/5; -1/100; -79/3; etc.

Decimales exactos: 1.3; -2.94; 0.005; etc.

Decimales periódicos: $0.\overline{6}$; $1257\overline{4}$; etc.

¿Por qué y cómo aparecen los números racionales? En los enteros teníamos tres operaciones que efectuamos con libertad, pero no podíamos dividir.

No se podía hacer la división de 3/5 = 0.6. Dicho resultado no pertenece a los enteros. En consecuencia, la necesidad de dividir con libertad conduce a la extensión de los números enteros. Entonces, ingresamos a otro conjunto denominado los números racionales. Es decir, en los quebrados, los números fraccionarios, ahí podemos restar y sumar, porque hay racionales tanto positivos como negativos -5/7 o 3/8, ambos descienden de los enteros.

Los números enteros y los naturales también son racionales (porque se pueden expresar como fracción con denominador 1). En otras palabras, los enteros y los naturales son subconjuntos de los racionales. Sin embargo, hay ciertos números que no entrarían en estos como los números irracionales, por eso hablamos de la aparición de los mismos.

Números irracionales

Los números irracionales (designados con la letra **I**) son raíces y números que no se pueden expresar como fracción) π; √2; etc. Tienen como definición que son números que poseen infinitas cifras decimales no periódicas, y, por lo tanto, no pueden ser expresados como fracciones.

¿Por qué y cómo aparecen los números irracionales? Estos números pueden haber sido descubiertos al tratar de resolver la longitud de un cuadrado, según el Teorema de Pitágoras, siendo el resultado el número √2. El ejemplo de números irracionales más claro e inmediato, cuya respuesta a su vez posee infinitas cifras decimales, que al no poder ser fraccionado, fue llamado irracional, en el sentido de no poder escribirlo como una ración o varias raciones o fracciones.

Para distinguir los números irracionales de los racionales, debemos tomar en cuenta que los números racionales sí se pueden escribir de manera fraccionada o racional. Por ejemplo 18/5, que es igual a 3.6; por lo tanto, es un número racional a diferencia de la raíz cuadrada de dos, en cuyo resultado se obtienen infinito número de cifras decimales, y su fraccionamiento resulta imposible. √2 = 1.4142135… o también por parte de π = 3.1492… De esta manera, podemos definir a los números irracionales como un decimal infinito no periódico. Es decir, cualquier representación de un número irracional solo es una aproximación en números racionales.

Hasta aquí, alguien puede objetar que la matemática pareciera tener un origen estrictamente empírico, que no dice nada del mundo, sino que parece que solo permitiría hablar de él, por lo cual no parece tener una base lógica que, por cierto, no cabe duda que existe en ella. Ante esto, lo que tenemos que decir es que lo único que hemos hecho es descomponer lo que hay en la historia de la aritmética analíticamente hablando al mejor estilo kantiano. “La analítica descubre por descomposición [Zergliederung] todos los actos de la razón que ejercitamos en el pensamiento en general. Es, por tanto, una analítica de la forma del entendimiento y de la razón, y también se llama con derecho la lógica de la verdad (formal), sin las cuales nuestro conocimiento, prescindiendo de los objetos, es incluso en sí mismo falso. (Kant, 2010a, [17])”. Así bien, hemos puesto a flote lo que yace en la historia de la aritmética, porque no podemos prescindir de los momentos que abrieron el curso de dicha ciencia. No obstante, esta ciencia no es meramente empírica sino también posee una carga racional, lógica. Esto hace que sea una ciencia trascendental, pues son las facultades de los sentidos (la experiencia) y la razón (en la construcción y descubrimiento), en forma piramidal, las que han hecho brotar dichos conocimientos de tal ciencia.

En conclusión, la analítica significa análisis-división. Viene a ser un método encaminado a descomponer el entendimiento con el objeto de hallar en él sus conceptos puros a priori o categorías.

El entendimiento utiliza los conceptos para realizar juicios, y es mediante tales juicios que el entendimiento conoce el objeto de forma inmediata. Es decir, el sujeto emite juicios para conocer los objetos, por ello Kant sostiene que pensar también es la forma como el sujeto conoce *y hace el conocimiento*. Y es que el sujeto conoce mediante juicios, y mediante ello es la manera que este le da una ubicación a los objetos. Es la manera mediata de representación que el sujeto tiene para con los objetos. Se dice mediata porque el sujeto no conoce de manera directa al objeto. Es decir, mediante conceptos se describe al objeto, pero no de manera directa, porque de manera directa es como se hace con la intuición sensible, que esta sí es inmediata, por que capta el objeto que nos es dado.

Así procede la forma de los juicios sintéticos a priori en la aritmética, porque el sujeto, cuando aprende a sumar, lo que emite son juicios universales que se enlazan con un carácter de totalidad. Estos son conocimientos que se pueden mencionar y que se cumplen en cualquier lugar.

Para Kant los juicios en la aritmética son producto de la existencia de la denominada cantidad extensiva, aquella representación de las partes que hace posible la representación del todo. En otras palabras, es la representación de las unidades que hace posible la estructuración del hallazgo de la totalidad de sumandos. Por ello, es la razón que Kant denomina a este proceder como axiomas de la intuición, que podemos catalogar como principios que posee nuestra intuición, para el proceder de la suma, donde dichas sumas no son axiomas sino tan solo fórmulas numéricas.

Gracias a la intuición, según Kant, vemos la sucesión del contar que se produce en el tiempo, pues es el sujeto que se hace consciente de que una cosa va antes y otra va después; de que para llegar a 5, por ejemplo, tenemos que pasar por 1; 2; 3; 4. Y que, además, para llegar a un número determinado, como producto de la suma, ciertamente es indiferente qué número este antes o este después, pues entre dos números, puestos en el orden que fuere, arrojará esto el mismo resultado.

En la carta a Schultz, Kant piensa en la construcción de cifras en la aritmética. Dicha parte de la matemática posee postulados. Es decir, posee juicios prácticos que son inmediatamente ciertos, producto de la intuición que hacemos al sumar. Por ejemplo, si sumamos, ya sea unidades o cifras, la segunda que pongamos será la continuidad de la primera como producto de la consecución que se da sobre esta misma (la primera).

Planteado esto, arribamos a lo siguiente. Entendemos que Kant escogió la suma que es el primer registro de la aritmética que tuvo la historia de la humanidad, producto de ser la primera. Si no se sabe esta, no se pude arribar a otras partes más complicadas de la aritmética. Como las otras partes están después de las fórmulas numéricas simples, en consecuencia, la aritmética misma es una pirámide. Si no se sabe mínimamente sumar de forma simple, no se puede proceder con otras complejidades de la aritmética, como el resolver las otras operaciones básicas distintas de la suma que posee la aritmética. Por lo cual, aquí se cumple lo siguiente: todo conocimiento parte de la experiencia, pero no todo conocimiento se hace solo con la misma, porque hay que hacer demostraciones formales con las operaciones distintas a la suma. Pero por más que sean formales, no implica que se deje a un costado el lado empírico del aprender de dicha operación denominada suma. Cabe aclarar, dicha operación es producto de la mezcla de los sentidos y la razón para conseguir el aprendizaje de dicha operación. Por ejemplo, cuando aprendemos a sumar, no se nos dice 2+2=4, si es que se nos dijese eso nunca más querríamos aprender a sumar. Lo que sucede, en ese instante, es que se nos dice que dos objetos "por uno y otro lado" "reunidos" conforman cuatro. Así bien, son nuestros sentidos quienes se percatan de ello, propiamente la vista, pero es nuestra mente quien "almacena" dicha información. Y como nuestra mente no es pasiva sino activa, podemos, a raíz de dicho aprendizaje, proceder a desenvolvernos con cifras mayores y hasta con números más allá de los naturales.

CAPÍTULO III

Alcances y límites de algunos puntos de vista sobre la filosofía de la aritmética en Kant

Los capítulos anteriores nos llevaron a decir que la tesis kantiana de los juicios sintéticos a priori de la aritmética es sostenible en la medida en que se recurra a la historia de tal ciencia. Así bien, si revisamos y, bajo ello, reflexionamos sobre cómo el sujeto ha aprendido las operaciones en la aritmética, además del pasar de los números naturales hacia los números irracionales, encontraremos que el primer instante en que empezó todo ese desarrollo fue por medio de la razón y los sentidos, quienes permitieron esto en mención. Y, a raíz de los números naturales, es que empieza la pirámide y la construcción de dicho saber que no es más que una construcción bajo descubrimiento sobre tal conocimiento.

Sentado esto, en los capítulos precedentes, nos queda el camino libre para presentar a continuación algunas opiniones recogidas de los últimos años sobre la filosofía de la aritmética de Kant. Los autores sobre los cuales tratamos, con el único ánimo de polemizar, son Robert Hanna, Daniel Sutherland, Kristina Engelhard, Peter Mittelstaedt y Rogelio Rovira. No pretendemos realizar un ensayo de cada uno de estos autores. No obstante, señalaremos cuáles son los alcances y límites de dichas opiniones, todo con el fin de hacer un balance y señalar en qué situación es vista y cómo es sostenible la filosofía de la aritmética de Kant por los críticos neokantianos en la actualidad. Al mismo tiempo con esto validaremos nuestras palabras vertidas en nuestro segundo capítulo, es decir, que los juicios sintéticos a priori en la aritmética son válidos si tomamos en cuenta la forma con la que se fue desarrollando la aritmética.

Así bien, en la primera parte de este capítulo analizaremos un ensayo de Robert Hanna titulado *Mathematics for Humans: Kant's Philosophy of arithmetic revisited* (*Matemáticas por humanos: Revisión de la filosofía de la aritmética de Kant*). Así bien, veremos la distinción que hace Hanna entre el conocimiento filosófico y el conocimiento matemático. Este autor no distingue entre los inicios de la matemática y su estructura piramidal de la misma y piensa que los conceptos matemáticos son creaciones propias del sujeto. Además, traza innecesariamente una cognición específicamente matemática en distinción de una cognición arbitraria (consensual) de la misma. Además, sobre el tópico de la construcción conceptual vertida por Hanna, este no toma en cuenta la generación de conceptos y la forma como Kant expone los juicios sintéticos a priori en la aritmética. Más precisamente, no toma en cuenta cómo el sujeto enrumbó el camino de las operaciones en la aritmética, partiendo desde la suma. No toma en cuenta que en los juicios de esta operación se halla la conceptualización. Esto debido a que, cuando el sujeto aprende, empieza a definir, a conceptualizar los saberes mediante juicios, ante lo cual, hacemos mención que estos puntos sobre la generación de conceptos en matemática, no son tomados en cuenta. En consecuencia, en dicha construcción la intuición pura hace solo referencia al espacio y tiempo, que son las formas puras de la sensibilidad humana. Así bien, "exhibir una instancia de un concepto puro en la intuición pura" no es producir un esquema de ese concepto. El esquema del concepto salta a partir de la generación de conocimiento de la representación de impresiones, que, al intuir propiamente, recrea conocimiento, gracias a la representación espontánea que construye ello.

Por último, al construir un concepto, hacemos referencia a uno de tipo numérico. Este consiste en que, de la imaginación productiva (imaginación trascendental y no imaginación pura como sostiene Hanna), el primer elemento que permite el conocimiento se desprende un aspecto sintético productivo del mismo. Esto es como producto de haber obtenido un saber. En este caso es la suma de números, pero de esto se puede ir más allá, desarrollar ese saber. Advertimos que Hanna ni siquiera lo toma en cuenta y asume la imaginación pura a secas sin tomar en cuenta sus aspectos de la misma. Por añadidura, lo interesante de Hanna es el reconocer que la aritmética para Kant no es solo una ciencia exacta, sino también, fundamentalmente, una ciencia humana.

En la segunda parte de este capítulo analizaremos *Kant on arithmetic, algebra, and the theory of proportions* (*Kant sobre la aritmética*, *el álgebra, y la teoría de las proporciones*) de Daniel Sutherland. Específicamente, nos abocaremos a dos tópicos. El primero, es *Kant sobre la cognición matemática de proposiciones aritméticas* y, el segundo, es *La aritmética y el número en Kant*.

Sobre lo primero que hablaremos es que Sutherland no toma en cuenta la formulación de un juicio universal, que en la aritmética en particular se establece. Por ejemplo, que todo número siete lo podemos obtener de diferentes sumas, como la de 2 + 5 o 6 + 1 o cualquier otra combinación, y, para poder formular tal juicio, el entendimiento debe haber elaborado el concepto puro de totalidad. Es decir, un concepto puro que el entendimiento puro produce a partir de lo diverso, en este caso, de las múltiples posibilidades para que se tenga que hallar el número 7. Y esto en estrecha relación con la forma lógica de los juicios. Explicitando, pensemos en el juicio "6 + 1= 7". Ello es un juicio universal que se relaciona con la categoría de totalidad de cantidad, pues el total de veces que mencionemos dicho juicio universal en cualquier lugar, será el total de veces que siempre arroje la misma cantidad.

El segundo tópico está dividido en tres puntos: el primero es que Kant no explica la cognición de números; el segundo es la tradición aritmética, que, según Sutherland, sostiene que Kant, a pesar de su temprana divergencia, tiene una opinión basada en la naturaleza de magnitudes. El tercer punto es sobre el problema de la homogeneidad.

Así bien, en lo primero tenemos la acusación hacia Kant del no haber distinguido el inicio de la relación de los seres humanos con los números. En lo segundo, sucede que los puntos de vista de Kant reflejan la concepción griega de números en lugar de los modernos. Lo que Sutherland no llega a discernir es por qué Kant le da más preferencia a los números enteros (naturales), como él mismo le llama, también posición más griega que moderna. A nuestro entender, el punto está en que se debe tomar en cuenta que la operación más elemental de todas las operaciones aritméticas es la suma, que está incluso antes de cualquier otra operación matemática (incluso antes que la suma de fracciones). Por lo cual, las demás operaciones recaen y se basan bajo los conocimientos de la primera, la suma.

El tercer problema concierne a la homogeneidad. La interrogante que se hace Sutherland es si la intuición es o no necesaria para la representación de las magnitudes (cantidades) discretas de la aritmética. Según Sutherland, estos tópicos mencionados explican por qué Kant es reacio a permitir números irracionales. Sobre estos sostenemos que Kant no es reacio a permitir números irracionales. Solo sostiene que se derivan de una forma muy particular y que no son de carácter natural, pues el hombre no aprende a sumar con ellos, sino que en el desarrollo de los números se encuentra con ellos. Por lo cual, esa es la razón que no es un concepto vacío (√2) y, gracias a la ayuda de la geometría, nos permitiría dicha demostración.

En tercer lugar, analizaremos *Kant's theory of arithmetic: A constructive approach?* (*La teoría de la aritmética de Kant: ¿un enfoque constructivo?*). Este es un escrito de dos filósofos Kristina Engelhard y Peter Mittelstaedt. Nuestro interés radica en dos tópicos. El primero es que los juicios en la aritmética son sintéticos a priori, al modo de Kant. Y el segundo es que la intuición es el elemento a partir del cual se procede en la construcción de la aritmética.

Así bien, sobre lo primero los autores empiezan refiriendo que la tesis predominante de la teoría de las matemáticas de Kant es su afirmación de que todos los juicios matemáticos son a priori, y que la mayoría de ellos son sintéticos. Aquí sucede lo siguiente. Si Kant hizo la distinción de dos tipos de juicios, juicio analítico y juicio sintético, era para dar esclarecimiento a la distinción que había en su época, las verdades de razón y las verdades de hecho de Leibniz. Sin embargo, el mismo Kant sostuvo juicios sintéticos a priori y además que dichos juicios son verdaderos, y que en ellos se filtra la raíz común: los sentidos y la razón. En otras palabras, para que un matemático relacione de manera correcta y diga, por ejemplo, que 'a = a', primero ha tenido que saber lo que es 'a', lo que representa o aprender lo que es 'a'. Es decir, que es una letra del alfabeto y, después, que es una letra de representación de un objeto.

En el caso del signo '=' ocurre que tiene que saberse lo que dichos "trazos" significan, que es una equivalencia, que ello señala igualdad a ambos lados del signo y por ende se identifica a lo mismo. Si nos damos cuenta, es una construcción que a su vez se ha ido descubriendo, pero de dicho conocimiento se hace una construcción del conocimiento. Más aún, no se parte sin nada, sino sabiendo lo que es en este caso 'a' y sabiendo lo que es '='. Lo mismo sucede cuando un matemático afirma '(a + b) > a'. Sabe lo que ello representa, siempre y cuando sabe lo que representa cada una de las letras de los símbolos '+' '>'. Si sabe lo que la expresión denota, en consecuencia, sabe lo que dicha expresión quiere decir o significa. Entonces, esto surge con conocimientos previos. ¿En qué sentido? Es nuestra mente que se da cuenta del proceder para elaborar dichas fórmulas. Sentado esto, decimos por ello que Kant concluye sosteniendo que, si bien el predicado se halla necesariamente ligado al sujeto, no lo está en cuanto pensado en este último, sino gracias a una intuición que ha de añadirse al concepto.

Por último, no es cierto que en Kant, en cuanto a los números respecta, sea posible verlos únicamente en la experiencia, en el mundo exterior, pues no necesariamente todos los números los vemos reflejados en la experiencia. Yo puedo ver un cuarto de pollo, pero no un cuarto de perro (1/4, número tomado en representación de un objeto). Por lo cual, los números son reflejados en la experiencia en ciertos objetos que son posibles y otros no. Por último, los autores sostienen la intuición en Kant, pero nunca llegaron a discernir el tipo de intuición. A como nosotros vemos este tópico, lo que entra a tallar en Kant es la intuición derivada, la cual al intuir no crea nada, sino solo crea conocimiento, producto de percibir un objeto. En otras palabras, gracias a la inferencia es que podemos extender los números, pero dicha inferencia -en el caso de las operaciones aritméticas- es producto de la intuición derivada.

En la cuarta parte de este capítulo analizaremos *¿es 7 + 5 = 12 un juicio sintético? Examen de las razones de Kant (y de Schultz)* de Rogelio Rovira. Dividimos el análisis en tres partes. La primera trata sobre el signo "+", que equivale a la conjunción copulativa "y". Por lo cual, la suma vale tanto como mera “reunión” (*Vereinigung*) o “composición” (*Zusammensetzung*) de dos números, al mismo tiempo. El signo “+” representa la operación aritmética de la suma. Es decir, representa la “adición” (*Addition*) de los números, porque la adición no es más que el total de la composición o la reunión de dos números o más. En consecuencia, no podemos desligar la composición y reunión de la adición como lo hace Rovira.

De otro lado, no podemos mezclar 7 + 5 = 12 con 24 : 2 = 12 o de 3 · 4 = 12 ni tampoco si lo quieren 17 - 5 = 12 como lo hace Rovira, porque todas las operaciones antes señaladas, pese a arrojar el mismo resultado, no se les puede equiparar. No se puede, no porque se hable de suma, división, multiplicación o resta, sino porque una es primero que la otra. Nunca se aprende primero a dividir, a multiplicar o a restar. Lo que se aprende primero es a sumar, y con números pequeños, para así proceder después con números grandes. Por lo cual, el número es el resultado de otras operaciones aritméticas, pero siempre y cuando se tenga en cuenta el proceder y el orden de aprendizaje de las diferentes operaciones aritméticas.

Segundo, es muy desconcertante atacar el juicio kantiano por una cuestión de tipo semántico, pero vayamos más allá de eso. Cuando Kant piensa en 7 + 5 = 12, no es un juicio sintético y tampoco un juicio analítico, y dice que ello es un juicio sintético a priori. Eso es porque primero interactúa la razón y los sentidos en el aprender humano en este tipo de operaciones. Por lo cual, al decir “es”, tranquilamente podemos decir “nos da” o “tenemos” la universalidad y necesidad características del juicio analítico que se proyecta en la suma, debido a que se cumple siempre en cualquier parte dicho resultado, y segundo porque el juicio es extensivo. El resultado de la suma nos dice algo más de lo que nos dice los dos números sumados (o también tres o más números sumados).

Tercero, Kant se refiere al 7, al 5 y al 12 algunas veces como conceptos o representaciones, y otras veces como números, no asumir el porqué es algo que carece de análisis por parte del examinador. Si pensamos o hablamos de un número, hablamos de una representación de objeto concreto o abstracto, y, si lo vemos como tal, es una conceptualización. En consecuencia, cuando hablamos de número, proyectamos una representación en él, y, al hacerlo, trae como resultado precisamente el trabajar con un concepto.

Por último, Rovira se queda con tres problemas: ¿Qué es propiamente sumar? ¿En qué consiste la igualdad numérica? ¿Qué es el número? Las preguntas son interesantes, pero son eso y nada más. El saber con plenitud lo que es un número implica llegar a conocer el noúmeno, pero en la filosofía de Kant solo se conoce el fenómeno, es decir, las apariencias. La suma sigue siendo como tal, en nuestra vida cotidiana y en la matemática clásica 7 + 5 la suma, adición o reunión de ello seguirá siendo 12. La igualdad seguirá asumiéndose como la equiparidad entre dos cantidades de números u otras. Pero lo más importante es que las operaciones aritméticas son construcciones por parte del sujeto, construcciones del descubrimiento y la forma del conocer del mismo. Si no fuese de ese modo no tendríamos o no hubiéramos tenido la posibilidad del desarrollo mismo de las operaciones aritméticas.

De lo expuesto, llegaremos a sostener que es insuficiente el análisis meramente de la filosofía de la aritmética de Kant, y el pretender únicamente el estudio de la misma, sin tomar en cuenta los inicios de la aritmética. Esto nos llevaría a tener equívocos, algunos muy agudos. En realidad, a nuestro modo de ver las cosas, si no tomamos en cuenta por qué Kant fue tan "sencillo" al proponer ejemplos como la suma misma, y siempre trabajar con los números naturales, es decir, si no tomamos en cuenta por qué procedió bajo los inicios de la aritmética misma, no entenderemos en qué sentido habló de que en la aritmética existen juicios sintéticos a priori.

1. Sobre la concepción constructiva de la aritmética en Kant, según Robert Hanna

En el 2002 aparece en la revista *European journal of philosophy* un ensayo de Robert Hanna titulado *Mathematics for Humans: Kant's Philosophy of arithmetic* *revisited* (*Matemáticas por humanos: Revisión de la filosofía de la aritmética de Kant*) en este texto se presenta lo siguiente:

> "En este ensayo reviso los puntos de vista muy criticados de Kant sobre la aritmética. Al hacer esto, hago un caso para la afirmación de que su teoría de la aritmética no está, de hecho, sujeto a la objeción más familiar y contundente en contra de ella, a saber, que su doctrina de la dependencia de la aritmética del tiempo es claramente falsa, o aun peor, simplemente ininteligible; por el contrario, la doctrina de Kant sobre el tiempo y la aritmética es muy original, plenamente inteligible y con salvedades debido a las limitaciones inherentes de sus concepciones de la aritmética y la lógica, defendible en una medida importante" (Hanna, 2002, p.328).[12]

El ensayo contiene cuatro secciones. Tomando en cuenta que la primera sección es una introducción, las tres siguientes partes son lo sintético a priori de la aritmética, lo que significa el concepto de número y la noción kantiana de la construcción aritmética.[13]

Precisamente es a la cuarta sección donde apuntarán nuestras observaciones sobre el ensayo de Hanna. Las razones son que no compartimos, en parte, su visión que tiene sobre la construcción conceptual de la aritmética de Kant.

Hanna empieza la sección IV de su texto diciendo que dicha parte es lo más difícil a tratar. "Ninguna parte de la filosofía de Kant de la aritmética es sencilla; pero he estado guardando lo más difícil para el final. Esta es la teoría de Kant de la 'construcción' (*Konstruktion*) matemática en su particular aplicación aritmética"

[12] "In this essay I revisit Kant´s much- criticized views on arithmetic. In so doing I make a case for the claim that his theory of arithmetic is not in fact subject to the most familiar and forceful objection against it, namely that his doctrine of the dependence of arithmetic on time is plainly false, or even worse, simply unintelligible; on the contrary, Kant´s doctrine about time and arithmetic is highly original, fully intelligible, and with qualifications due to the inherent limitations of his conceptions of arithmetic and logic, defensible to an important extent"

[13] "En la primera etapa, reconstruyo el argumento de Kant para el apriorismo sintético de la aritmética (sección II). En la segunda etapa, se desarrolla una nueva cuenta de su notoria doctrina de la dependencia de la aritmética del tiempo (sección III). Y, finalmente, en la tercera etapa, se desarrolla una nueva cuenta correspondientemente a la noción kantiana de la construcción aritmética (sección IV)" (Ídem, p. 329).
"In the first stage, I reconstruct Kant's argument for the synthetic apriority of arithmetic (section II). In the second stage, I develop a new account of his notorious doctrine of the dependence of arithmetic on time (section III). And finally in the third stage, I develop a correspondingly new account of the Kantian notion of arithmetical construction (section IV)".

(Ídem, p.342).[14] Así, Hanna distingue entre lo que es una cognición filosófica y una cognición matemática en Kant que se expresa en el capítulo I de la sección I de la "doctrina trascendental del método […] todo conocimiento racional es, o bien por conceptos, o bien por construcción de los conceptos; el primero se llama [conocimiento] filosófico, el segundo, matemático" (A837 - B865).[15] Por cierto, cabe aclarar que en *La investigación relativa a la distinción de los principios de la teología Natural y moral* de 1764, Kant ya había planteado la diferencia aducida a ambos aspectos cognitivos. Así lo reconoce también Hanna, cuestión que posteriormente también se diferencia en la *Crítica de la razón pura*. No obstante, de dicha cuestión Hanna reconoce un problema en esta distinción:

> "Pero esta forma de distinción tiene dos problemas importantes. Primero, en el lado de cognición filosófica, no distingue entre el mero análisis de conceptos y el análisis de conceptos específicamente filosóficos y por lo tanto no demuestra por qué las proposiciones de la filosofía son sintéticas a priori, no analíticas. En segundo lugar, en el lado de cognición matemática, no discrimina adecuadamente entre la creación de nuevos conceptos por mera estipulación o decisión arbitraria (CPR A729/B757) y la cognición específicamente matemática" (Ídem, p. 342).[16]

Al respecto de lo primero, cabe señalar que si este revisara los conceptos de Kant tan simples como el giro copernicano, se comprendería que los objetos no constituyen a la razón, sino que es el sujeto, mediante sus sentidos y su razón,

---

[14] "No part of Kant's philosophy of arithmetic is a walk in the park; but I have been saving the trickiest bit of it for last. This is Kant´s theory of mathematical 'construction' (Konstrukion) in its particular application to arithmetic".

[15] Y con respecto a la distinción entre el conocimiento filosófico y matemático por parte de Kant encontramos esta diferencia: "El conocimiento *filosófico* es el *conocimiento racional* por *conceptos*; el matemático [es el conocimiento] por *construcción* de los conceptos. *Construir* un concepto significa: exhibir *a priori* la intuición que le corresponde. Para la construcción de un concepto se requiere, pues, una intuición *no empírica*, que por consiguiente, como intuición, es un objeto *singular*, pero que sin embargo, como construcción de un concepto ([como construcción] de una representación universal) debe expresar, en la representación, validez universal con respecto a todas las intuiciones posibles que hayan de estar bajo ese concepto" (A714 - B742).

[16] "But this way of drawing the distinction has two important problems. First, on the side of philosophical cognition, it does not distinguish between the mere analysis of concepts and the specifically philosophical analysis of concepts and there does not show why the propositions of philosophy are synthetic a priori, not analytic. Second, on the side of mathematical cognition, it does not adequately discriminate between the of new concepts by mere arbitrary decision or stipulation (CPR A729/B757) and specifically mathematical cognition".

que estudia a los objetos, los define y conceptualiza. En consecuencia, si el sujeto aprende de esa forma, no es posible que los juicios que emita de dicho conocimiento no sean juicios sintéticos a priori, ya que, la mezcla de la razón y la experiencia al conocer son el soporte de los juicios sintéticos a priori.

Por otra parte, en referencia a la cognición matemática que no discrimina entre la creación de nuevos conceptos por mera decisión arbitraria o estipulación y la cognición específicamente matemática, Hanna no distingue entre los inicios de la matemática y su estructura piramidal de la misma, y piensa que los conceptos matemáticos son creaciones propias del sujeto. Ahora bien, sí es cierto que algunos conceptos de la matemática pueden ser arbitrarios (consensuales), pero esto tal vez alguien pueda llegar a objetar y sostener que implica que sean empíricos, cuestión completamente errada, pues, para Kant el sujeto cuando realiza conocimiento es producto de la razón y de los sentidos. Así bien, no cabe hablar para Kant de una cognición específicamente matemática en distinción de una cognición arbitraria de la misma, pues dicha distinción es inexistente.

Entre la distinción de la cognición filosófica y la cognición matemática, a Hanna lo que le interesa es la cognición matemática. Así pues, dice "para nuestros propósitos, podemos dejar a un lado el concepto renovado de cognición filosófica. Lo importante para nosotros es que la esencia de la cognición matemática ahora se dice que se encuentran en 'la construcción de los conceptos'" (Ídem, p. 342).[17] Así bien, Hanna toma en cuenta tres puntos y la hipótesis que maneja es la siguiente: "(a) que las matemáticas requieren la construcción de conceptos, (b) que la construcción matemática de conceptos se realiza mediante la pura intuición junto con la pura imaginación, y (c) que la aritmética, en particular, requiere la construcción de conceptos numéricos, o conceptos de magnitudes [cantidades]" (Ídem, p. 343).[18] Seguido de esto aparecen tres preguntas por el afán de entender el punto (c):

[17] "For our purposes, we can leave aside the renovated notion of philosophical cognition. What is important for us is that the essence of mathematical cognition is now said to lie in 'the construction of concepts'".

[18] "(a) that mathematics requires the construction of concepts, (b) that mathematical construction of concepts is carried out by means of pure intuition together with the pure imagination, and (c) that arithmetic in particular requires the construction of numerical concepts, or concepts of magnitudes".

"Ahora, nuestro objetivo es entender (c); pero obviamente eso es comprensible si y solo si (a) y (b) son inteligibles. Así que lo que necesitamos saber son las respuestas a estas tres preguntas, en secuencia: (a*), hablando en términos generales, ¿existe la construcción de un concepto?, (b*) ¿Cómo, en concreto, uno puede construir un concepto por medio de la intuición pura junto con la pura imaginación? y (c*) ¿Qué, precisamente, significa construir un concepto numérico?" (Ídem, pp. 342-343).[19]

La respuesta a la primera pregunta procede de inmediato, aquí tenemos las líneas del mismo autor:

"(1) Hablando en general, ¿Qué es la construcción de un concepto? El sustantivo abstracto Alemán '*Konstruktion*' y su asociado verbo '*konstruieren*', al igual que los términos ingleses correspondiente '*construction*' y '*construct*', son ambiguos. Por un lado, expresan la idea de poner algo o construir algo nuevo, por la reunión de diversos materiales concretos o abstractos, o por operaciones repetitivas en diversos materiales concretos o abstractos –al igual que en 'la construcción de una casa' o 'la construcción de un sistema formal'. Y por otro lado, que expresan la noción de análisis gramaticales o interpretación semántica– al igual que 'yo decido hacer una cierta construcción de la frase' o 'el juez construye la ley'. Llamemos al primer sentido 'construcción como creación' y el segundo sentido 'construcción como conceptualización'. Dado el interés conocido de Kant en la jurisprudencia y su afición igualmente conocida para el uso legal de metáforas y analogías en contextos metafísicos, epistémicos, lógicos y semánticos, parece obvio que el pensamiento de construcción como conceptualización sería tan natural para él como pensamiento de construcción como creación" (Ídem, p. 344).[20]

[19] "Now our goal is to undertand (c); but obviously that is intelligible if and only if (a) and (b) are intelligible. So what we need to know are answers to these three questions, in sequence: (a*) what, generally speaking, is the construction of a concept?, (b*) how, specifically, does one construct a concept by means of pure intuition together with the pure imagination?, and (c*) what, precisely, does it mean to construct a numerical concept?".

[20] "(1) What, generally speaking, is the construction of a concept? The German abstract noun 'Konstruktion' and its associated verb 'Konstruieren', just like the corresponding English terms 'construction' and 'construct', are ambiguous. On the one hand, they express the notion of putting something together or building something new, by the assembly of diverse concrete or abstract materials, or by repeated operations on diverse concrete or abstract materials –as in 'the construction of a house' or 'the construction of a formal system'. And on the other hand, they express the notion of grammatical parsing or semantic interpretation– as in 'I chose to put a certain construction on that sentence' or 'The judge constructs the law'. Let us call the first sense 'construction as creation' and second sense 'construction as construal'. Given Kant´s well-know interest in jurisprudence and his equally well-know fondness for using legal metaphor and analogies in metaphysical, epistemic, logical, and semantic contexts, it seems obvious that thinking of construction as construal would be as natural to him as thinking of construction as creation".

Así bien, según Hanna, “[…] para Kant, los conceptos se crean de diversos materiales cognitivos por asamblea u operaciones repetitivas. Es decir, se crean por procesos sintéticos mentales comparativos, de reflexión y abstracción. Kant llama a esto la 'generación' de conceptos (JL Ak. ix – 94-95)” (Ídem, p. 344).[21] Pero para Hanna “[…] la generación de conceptos no parecen ser lo que Kant tiene en mente en el caso de las matemáticas, puesto que él no hace mención de este tipo de actividad mental en ese contexto. Por otra parte, la intuición pura no desempeña ningún papel especial en la generación de conceptos.” (Ídem, p. 344).[22] Bajo lo vertido por Hanna, tenemos que decir que Kant sí hace referencia a la generación de conceptos. Propiamente esto se refiere a la forma cómo Kant expone los juicios sintéticos a priori en la aritmética, más precisamente, como el sujeto enrumbó el camino de las operaciones en la aritmética, partiendo desde la suma. Dentro de la señalización de juicios en esta operación se haya la conceptualización, porque el sujeto cuando aprende empieza a definir, conceptualizar, los saberes mediante juicios. Si eso no se le pude llamar generación de conceptos en matemática, entonces ¿qué es?

Sentado esto, cabe agregar que Kant en la *Crítica de la razón pura* habla de la síntesis de la variedad que el sujeto realiza en lo que concierne al conocimiento, en la generación o en el proceder del mismo. Se habla de la síntesis pura que descansa en los cimentos de la unidad sintética a priori, que propiamente es una construcción de nuestra mente, de la combinación de la variedad, y de nuestros sentidos externos, esto último porque se enlaza dicha construcción con la realidad. Así pues, en Kant, leemos lo siguiente:

> “// *La síntesis pura*, *representada en general*, da el concepto puro del entendimiento. Entiendo por tal síntesis aquella que descansa en un fundamento de unidad sintética *a priori*; así nuestro contar (esto se nota

[21] “[…] for Kant, concepts are created from diverse cognitive materials by assembly or repeated operations, i.e., by synthetic mental processes involving comparison, reflection, and abstraction. Kant calls this the ‘generation’ of concepts (JL Ak. IX. 94-95)”.

[22] “[…] the generation of concepts does seem to be what Kant has in mind in the case of mathematics, since he makes no mention of this sort mental activity in that context. Moreover pure intuition plays no special role in the generation of concepts”.

> especialmente en los números mayores) es una *síntesis según conceptos*, porque ocurre según un fundamento común de unidad (p. ej. La decena). Bajo este concepto se torna necesaria, por tanto, la unidad en la síntesis de lo múltiple. (Kant, 2009, B104)”

Y se toma la síntesis de lo múltiple, porque es ella, en primera instancia, la generadora de conocimiento y, por ende, de un concepto. La filosofía trascendental de Kant precisamente sostiene el conocimiento, producto de que es el mismo sujeto quien define (conceptualiza) algo determinado en el mismo instante que tiene frente a sí eso determinado. Por lo cual, si Kant no hizo mención en ese contexto de la generación como actividad mental en las matemáticas, es posible inferir ¿por qué? La filosofía de Kant es un sistema de filosofía donde un concepto suyo debe encajar en cualquier parte de su filosofía.

Por último, Hanna sostiene que:

> “[…] la mayoría de los lectores de Kant típicamente toma una diapositiva interpretación rápida y no reconocida de 'la construcción de conceptos' a 'la construcción de objetos cayendo bajo conceptos' y entonces, teniendo en cuenta el hecho de que Kant habla de una especie de proceso mental que implica pura intuición y pura imaginación, precipitadamente concluyen que la construcción matemática kantiana es la creación mental de objetos matemáticos” (Hanna, 2002. p. 344)[23]

En esto estamos de acuerdo, porque ello sería caer en un psicologismo que Kant no estaría de acuerdo, como el mismo Hanna comenta líneas abajo “[…] leyendo la construcción de conceptos como la creación mental de objetos matemáticos no solo violenta los puntos de vista de Kant, sino también las importaciones de muchos de los problemas de una filosofía de las matemáticas […]” (Ídem, pp.344-345).[24] Así bien, lo importante a tomar en cuenta de la primera parte de la argumentación de este autor es que: “[…] Kant entiende la conceptualización [una interpretación del significado] de conceptos matemáticos y

[23] “[…] most readers of Kant typically take a quick and unacknowledged interpretative slide from ‘the construction of concepts’ to ‘the construction of objects falling under concepts’, and then, taking into account the fact that Kant is talking about some sort of mental process involving pure intuition and pure imagination, hastily conclude that Kantian mathematical construction is the mental creation of mathematical objects”.

[24] “[…] reading the construction of concepts as the mental creation of mathematical objects not only does violence to Kant’s view, but also imports many of the problems of a philosophy of mathematics”.

no la creación mental de objetos matemáticos" (Ídem, p. 345).[25] Y es precisamente de esa forma porque *es el sujeto quien define y maneja los conceptos matemáticos*, pues los objetos matemáticos no son independientes del sujeto, tampoco dependen únicamente del sujeto. En realidad, los objetos matemáticos están bajo descubrimiento del sujeto al mismo tiempo bajo construcción del mismo de ese saber que se descubre.

La segunda parte de su argumentación consiste en resolver una segunda pregunta, que es como dijimos líneas arriba, ¿cómo, específicamente, alguien construye un concepto por medio de la intuición pura junto con la pura imaginación? La respuesta de Hanna es la siguiente:

> "Mi hipótesis es que, en general, para la construcción de un concepto para Kant es analizar o semánticamente interpretarlo. Sabemos del texto fundamental en CPR A713 – 714/B741 – 742 que para construir un concepto matemático puro del entendimiento es para la pura imaginación ' exhibir ' una instancia de ese concepto en la intuición pura. Y también sabemos por el esquematismo que por la pura imaginación para exhibir una instancia de un concepto puro en la intuición pura es producir un esquema de ese concepto" (Ídem, p. 345) [26]

Pero aquí hay algo más que se debe señalar, es el procedimiento a partir del cual se forma el conocimiento, y que no es mencionado por Hanna, como, por ejemplo, la representación:

> "Nuestro conocimiento surge de dos fuentes fundamentales de la mente, de las cuales la primera es [la de] recibir representaciones (la receptividad de las impresiones), y la segunda, la facultad de conocer un objeto mediante esas representaciones (la espontaneidad de los

[25] "[…] Kant means the construal of mathematical concepts and not the mental creation of mathematical objects".

[26] "Precisamente Hanna hace referencia a estas líneas de la Crítica: "El conocimiento *filosófico* es el *conocimiento racional* por *conceptos*; el concepto [es el conocimiento] por *construcción* de los conceptos. *Construir* un concepto significa: exhibir *a priori* la intuición que le corresponde. Para la construcción de un concepto se requiere, pues, una intuición *no empírica*, que por consiguiente, como intuición, es un objeto *singular*, pero que sin embargo, como construcción de un concepto ([como construcción] de una representación universal) debe expresar, en la representación, validez universal con respecto a todas las intuiciones posibles que hayan de estar bajo ese concepto. Así yo construyo un triángulo al exhibir el objeto que corresponde a ese concepto, ya mediante mera imaginación, en la intuición pura, ya de acuerdo con ella, también en el papel, en la intuición empírica, pero ambos casos enteramente *a priori*, sin haber tomado de ninguna experiencia el modelo para ello" (Kant, 2009, A713/A714- B741/B742).

> conceptos); por la primera, un objeto nos es dado; por la segunda, este es pensado en relación con aquella representación ([considerada] como mera determinación de la mente)" (Kant, 2009, pág. A50- B74).

Y precisamente la "[…] representación que puede estar dada antes de todo pensar se llama intuición" (Ídem, B132), pero esa representación espontánea se denomina intuición originaria, que es del tipo intelectual, como el mismo Kant afirma: "[…] no por esta validez universal [esa manera de intuición] deja de ser sensibilidad, precisamente porque es derivada (*intuitus derivativus*) y no originaria (*intuitus originarius*) y por tanto no es intuición intelectual (…)" (Kant, 2009, B72).

Lo que apuntamos es que la intuición pura hace solo referencia al espacio y tiempo, que son las formas puras de la sensibilidad humana. Así bien, "exhibir una instancia de un concepto puro en la intuición pura", no es producir un esquema de ese concepto. El esquema del concepto brota a partir de la generación de conocimiento de la representación de impresiones que, al intuir propiamente, crea conocimiento, gracias a la representación espontánea que construye ello.

El tercer argumento gira bajo la tercera pregunta ¿Qué, precisamente, significa construir un concepto numérico? Y la argumentación de Hanna es la siguiente:

> "Construir un concepto, ya he dicho, es utilizar la imaginación pura para crear un esquema de ese concepto, o un modelo mental temporal o espacial puro de ella. Este modelo mental codifica la información conceptual en un formato espacial o temporal. En el caso de los conceptos numéricos, el modelo mental siempre es temporal en carácter – no en el sentido de que representa un evento de algún tipo, sino en el sentido de que es el mismo un modelo de algo que se encuentra entre los números naturales" (Hanna, 2002, p. 346).[27]

Con respecto a lo último de la cita no queremos ahondar porque es conocido que en Kant la aritmética se basa en la sucesión del tiempo. Pero, lo que sí tenemos que rescatar, es que el desenlace de este tercer argumento es el

[27] "To construct a concept, I have said, is to use the pure imagination to create a schema of that concept, or a pure spatial or temporal mental model of it. This mental model encodes conceptual information in a spatial or temporal format. In the case of numerical concepts, the mental model is always temporal in character – not in the sense that it represents an event of some sort, but rather in the sense that it is itself a model of something that is among the natural numbers".

término “imaginación pura” que utiliza Hana y que lo ha utilizado en su segundo argumento. Sin embargo, nuestra opinión con respecto a este tercer argumento consiste en que la “imaginación pura” es la base de su tercer argumento. Con respecto al término, tenemos que decir que se trata de la imaginación productiva (imaginación trascendental) el primer elemento que permite el conocimiento y es el término adecuado. Siendo de esta que se desprende un aspecto sintético, producto de haber conocido un saber, en este caso la suma de números, puede ir más allá, desarrollar ese saber. Advertimos que Hanna ni siquiera lo toma en cuenta y asume la imaginación pura a secas, sin tomar en cuenta sus aspectos de la misma.

Así bien, la argumentación de Hanna, termina por sostener que, en Kant, “la aritmética* es esencialmente el resultado de la combinación de la ontología formal de nuestra representación intuitiva humana del tiempo con los recursos conceptuales de la lógica en el sentido de Kant” (Ídem, p. 348).[28] Con lo cual se concluye, “así que la aritmética para Kant no es solo una ciencia exacta, sino también, y quizás más fundamentalmente, una ciencia humana” (Ídem, p.348).[29] Esto tiene su razón de ser en el mero hecho de que Hanna cree en una construcción del sujeto dentro de la matemática, pero dicha construcción no es meramente construcción del hombre, el sujeto construye conocimiento, pero al mismo tiempo es un descubridor del conocimiento. Decimos esto porque alguien puede objetar a Hanna y a Kant que los conceptos matemáticos son independientes del sujeto, pero la respuesta ante ello sería que es el sujeto quien los descubre y construye saber con los mismos, en una determinada área del saber humano como es en el caso de la aritmética.

[28] “[the] arithmetic* is essentially the result of combining the formal ontology of our human intuitional representation of time with the conceptual resources of logic in Kant’s sense”.

[29] “So arithmetic for Kant is not only an exact science, but also and perhaps most fundamentally, a human science”.

2. Sobre la cognición matemática de las proposiciones aritméticas y el número en Kant, según Daniel Sutherland

En el 2006, aparece en *Journal of the history of philosophy* un artículo de Daniel Sutherland llamado *Kant on arithmetic, algebra, and the theory of proportions* (*Kant sobre la aritmética*, *el álgebra, y la teoría de las proporciones*) aquí hay varios temas tratados, incluso desde un punto de vista histórico de la matemática en general,[30] pero lo que vamos a abordar son dos tópicos que se exponen. El primero es *Kant sobre la cognición matemática de proposiciones aritméticas* y el segundo es *La aritmética y el número en Kant*. Sobre el primer punto, se sostiene que las discusiones de la aritmética de Kant se centran en que la intuición es necesaria para representar números particulares. Así, se hace alusión al típico ejemplo de la introducción de la *Crítica* de 7 + 5 = 12, donde debemos buscar ayuda en la intuición para representar el '5' y '7' ya sea por el uso de los dedos o de los puntos sobre una página.

> "El punto de Kant es que el mero concepto de una suma como la unificación de dos números incluye la idea de que se deben poner juntos, pero que el concepto se queda corto en lo que se necesita, es decir, en realidad ponerlos juntos. Sin la intuición, no podemos conocer que en realidad ponerlos juntos equivale a 12. Concluye que la composición real

[30] Aunque cabe aclarar, como él mismo lo hace, que el propósito de su trabajo fue "Mi objetivo ha sido aclarar a la relación entre puntos de vista de Kant de la aritmética, el álgebra y teoría de las proporciones. También he sostenido que en opinión de Kant, la cognición aritmética requiere la representación de un colector estrictamente homogéneo, un papel previamente desatendido pero importante de la intuición en la aritmética de filosofía de Kant. Creo que estos resultados serán de interés para cualquiera que esté buscando o una comprensión histórica de la filosofía de las matemáticas o simplemente una perspectiva muy distinta de la moderna. También creo que serán de interés para quienes deseen conocer opiniones de Kant de la cognición humana más generalmente"
"My aim has been to clarify the relation between Kant's views of arithmetic, algebra and the theory of proportions. I have also argued that in Kant's view, arithmetical cognition requires the representation of a strictly homogeneous manifold, a previously neglected yet important role for intuition in Kant's philosophy of arithmetic. I think these results will be of interest to anyone looking for either a historical understanding of the philosophy of mathematics or simply a perspective quite different from the modern one. I also think that they will be of interest to anyone wishing to understand Kant's views of human cognition more generally".

> de las unidades no se puede representar sin intuición" (Sutherland, 2006, p. 541).[31]

A partir de aquí, hay dos cosas claves a tomar en cuenta la síntesis figurativa y la composición. Según el autor, "la composición es de importancia central para Kant. También dice que es 'síntesis figurativa', y que opera en el dibujo de una línea" (Sutherland, 2006, pp. 541).[32] Estos conceptos son muy importantes, pero ¿qué es una 'síntesis figurativa' y una composición?

> "Esta síntesis de lo múltiple de la intuición sensible, que es posible y necesaria *a priori*, puede llamarse figurativa (*síntesis speciosa*), para distinguirla de aquella que sería pensada en la mera categoría con respecto a lo múltiple de una intuición general, y que se llama enlace del entendimiento (*síntesis intellectualis*); ambas son trascendentales, no solamente porque ellas mismas proceden a priori, sino también porque fundamentan la posibilidad de otro conocimiento *a priori*.
>
> Pero la síntesis figurativa, cuando se dirige solamente a la unidad originaria sintética de la apercepción, es decir, [cuando se dirige] a esa unidad trascendental que es pensada en las categorías, debe llamarse síntesis trascendental de la imaginación, para distinguirse del enlace meramente intelectual." (Kant, 2009, B 151-152)

Así pues, vemos que Kant denomina la síntesis de la diversidad de la intuición sensible como síntesis figurada (*synthesis speciosa*), para diferenciarla de la síntesis intelectual (*synthesis intellectualis*). Ambas son trascendentales, pero cuando la síntesis figurada se refiere solo a la originaria unidad sintética de la

---

[31] "Kant's point is that the mere concept of a sum as the unification of two numbers includes the idea that they should be put together, but that the concept falls short of what is needed, namely, actually putting them together. Without intuition, we cannot cognize that actually putting them together is equal to 12. He concludes that the actual composing of units cannot be represented without intuition".

[32] "Composition is of central importance to Kant. He also calls it 'figurative synthesis' and it operates in the drawing of a line."

Aquí cabe aclarar que el autor cita (CPR, B 201 n.), pero lo que aparece ahí es lo siguiente que no tiene nada que ver con el término "composición", sin embargo lo que respecta del término en mención, lo encontramos a pie de página en B 202, lo cual lo colocamos en el texto mismo (arriba).

"He elegido con cuidado estas denominaciones, para que no se dejaran de notar las diferencias referentes a la evidencia y a la aplicación de estos principios. Pero pronto se pondrá de manifiesto que, tanto en lo que concierne a la // evidencia, como en lo que concierne a la determinación de los fenómenos a priori según las categorías de la cantidad y de cualidad (si se atiende únicamente a la forma de estas últimas), los | principios de ellas se distinguen, en eso, notablemente de los dos restantes; pues aquéllos pueden tener una certeza intuitiva, mientras que estos, una sola discursiva, aunque en ambos casos la certeza sea plena. Por eso, a aquéllos los llamaré los principios matemáticos, y a estos, los dinámicos.*" (Kant, 2009, B201) apercepción, entonces tiene que llamarse síntesis trascendental de la imaginación, a fin de diferenciarla de la combinación meramente intelectual. Por lo tanto, “Imaginación es la facultad de representar en la intuición un objeto aun sin la presencia de él” (Ídem, B 152), así pertenece a la sensibilidad. Sin embargo, en la medida en que su síntesis es una actividad de la espontaneidad, la imaginación es una facultad que determina a priori a la sensibilidad, de modo que se trata de una síntesis trascendental de acuerdo con las categorías, y por ello se relaciona con el entendimiento. Aquí se habla de la *synthesis speciosa*, porque las cuestiones numéricas, en cuanto naturales, tienen que ver con lo empírico.

Por otra parte, queda analizar el término composición:

> “[…] Kant se reserva el término 'composición' para la síntesis especial que genera, y solo genera, representaciones de magnitudes. Kant describe como la "síntesis de lo homogéneo en todo lo que puede considerarse matemáticamente". La síntesis de la composición es la base de los principios sintéticos matemáticos (CPR, n B 201.). La síntesis de Kant de la composición corresponde a la composición especial de que magnitudes homogéneas y solo las homogéneas magnitudes son capaces, y es la representación de esta composición en la intuición que se requiere en aritmética, así como la generación de magnitudes continuas” (Sutherland, 2006, pp. 541-542).[33]

Lo que realmente aparece con respecto a la composición es lo siguiente:

[33] “Composition is of central importance to Kant. He also calls it ‘figurative synthesis’, and it operates in the drawing of a line […]Kant reserves the term ‘composition’ for the special synthesis that generates, and only generates, representations of magnitudes.29 Kant describes it as the “synthesis of the homogeneous in everything that can be considered mathematically.” The synthesis of composition underlies the mathematical synthetic principles (*CPR*, B 201 n.). Kant’s synthesis of composition corresponds to the special composition of which homogeneous magnitudes and only homogeneous magnitudes are capable, and it is the representation of this composition in intuition that is required in arithmetic as well as the generation of continuous magnitudes.”

Aquí cabe aclarar que el autor cita (CPR, B 201 n.), pero lo que aparece ahí es lo siguiente que no tiene nada que ver con el término “composición”, sin embargo lo que respecta del término en mención, lo encontramos a pie de página en B 202, lo cual lo colocamos en el texto mismo (arriba).

“He elegido con cuidado estas denominaciones, para que no se dejaran de notar las diferencias referentes a la evidencia y a la aplicación de estos principios. Pero pronto se pondrá de manifiesto que, tanto en lo que concierne a la // evidencia, como en lo que concierne a la determinación de los fenómenos a priori según las categorías de la cantidad y de cualidad (si se atiende únicamente a la forma de estas últimas), los | principios de ellas se distinguen, en eso, notablemente de los dos restantes; pues aquéllos pueden tener una certeza intuitiva, mientras que estos, una sola discursiva, aunque en ambos casos la certeza sea plena. Por eso, a aquéllos los llamaré los principios matemáticos, y a estos, los dinámicos.*” (Kant, 2009, B201)

> “Todo enlace (*conjunctio*) es, ya composición (*compositio*), ya conexión (*nexus*). La primera es la síntesis de lo múltiple [cuyos elementos] *no* se pertenece[n] necesariamente unos a otros, como p. ej. los dos triángulos en los que se divide un cuadrado mediante la diagonal, tomados por sí mismos, no se pertenecen necesariamente uno al otro; y tal es la síntesis de lo homogéneo en todo lo que puede ser considerado matemáticamente (síntesis que a su vez puede dividirse en la de la *agregación* y la de la *coalición*, de las cuales la primera se dirige a cantidades *extensivas*, la otra a cantidades *intensivas*). El segundo enlace (*nexus*) es la síntesis de lo múltiple, en la medida en que [sus elementos] se pertenece[n] *necesariamente unos a otros*, como p. ej. el accidente es representado como enlazado a priori a alguna substancia, o el efecto a la causa; [múltiple] que por tanto es representado [como] enlazado *a priori* también *en tanto que es heterogéneo*; al cual enlace, puesto que no es arbitrario, lo llamo *dinámico*, porque concierne al enlace de la existencia de lo múltiple ([enlace] que // a su vez se puede dividir en el [enlace] *físico* de los fenómenos entre sí, y en el *metafísico*, enlace de ellos en la facultad cognoscitiva *a priori*)” (Kant, 2009, B 202).

Así bien, hay diferencias de lo que Sutherland sostiene y lo que Kant refiere con el término “composición”. La cita anterior, la primera parte de la misma que es lo que importa, la podemos presentar del siguiente modo: Todo enlace (*conjunctio*) es composición (*compositio*), que a su vez es conexión (*nexus*). “La primera es la síntesis de lo múltiple [cuyos elementos] *no* se pertenece[n] necesariamente unos a otros”, podemos decir aquí que en ello radica la importancia de la composición en una suma de números, porque lo que se hace es un recojo de varias cantidades para después procesarlas, en el entendimiento, y hallar una cifra determinada.

El sostener que: “El segundo enlace (*nexus*) es la síntesis de lo múltiple, en la medida en que [sus elementos] se pertenece[n] *necesariamente unos a otros”*, esto nos lleva a decir que a cada número que se representa en una determinada variedad, una vez hecho el recojo respectivo de los números para hallar una determinada suma, se proceden a armar los nexos entre uno y otro número para lograr una determinada cantidad, de manera que se van haciendo los nexos a partir de los cuales obtener una determinada cantidad, por ejemplo, para obtener 10, podemos hacerlos mediante varios nexos: 9 + 1 = 10, 8 + 2 = 10, 7 + 3 = 10, 6 + 4 = 10, 5 + 5 = 10.

Cabe aclarar que los conceptos Kantianos pertenecen a un sistema de filosofía, por lo cual se pueden manejar desde cualquier ángulo para verter un punto de vista sobre la realidad en general.

Por otra parte, cuando Sutherland sostiene que “la síntesis de lo homogéneo es todo lo que puede considerarse matemáticamente" y “la síntesis de la composición es la base de los principios sintéticos matemáticos” donde “la síntesis de Kant de la composición corresponde a la composición especial de que magnitudes homogéneas y solo estas y su representación de esta composición están en la intuición que se requiere en aritmética, así como la generación de magnitudes continuas”. Esto es completamente cierto, porque hay que tomar en cuenta que en Kant la magnitud es el hecho de tener conciencia de la diversidad homogénea que se puede captar en lo múltiple ante el hecho de percibir, esto último en sentido lato. Así bien, la conciencia de esa diversidad es lo que posibilita la existencia de la magnitud extensiva, y la extensión de ello lleva a hablar de continuidad, pues todos los fenómenos son como tales. Por eso, hace bien el autor cuando sostiene que “por "categoría de magnitud" Kant sostiene a las categorías de cantidad. Espacio y el tiempo nos permiten comprender que unos muchos conjuntos homogéneo constituyen una — es decir, que piezas homogéneas constituyen un todo — y esto es lo que se requiere para agarrar las categorías de cantidad” (Sutherland, 2006, p. 542).[34]

No obstante, al revisar lo que Sutherland sostiene sobre la composición aritmética y lo que implica su mereología, él interpreta que se requiere representar unos números particulares añadidos que son iguales a su particular total y esto a su vez hace un vínculo a las relaciones parte-todo. Así sostiene, de Kant, que, cuando se piensa en 3 + 4 = 7, se refiere a que:

> “[…] un *complementum ad totum* es necesario, para componer 3 y 4 las partes complementarias de todo el número 7. En la A-deducción así, Kant amplia que un número requiere ser visto como un todo (CPR, A 99).

[34] “By “category of magnitude” Kant means the categories of quantity. Space and time allow us to grasp that a homogeneous many together constitute a one —that is, that homogeneous parts constitute a whole— and this is what is required for grasping the categories of quantity.”

> Por otra parte, a raíz de la tabla de categorías en §11, él afirma que el número pertenece a la categoría de totalidad, por lo cual quiere decir que el número requiere no solo una multitud de partes, sino una cognición del conjunto, que es hecha posible por la categoría de la totalidad (CPR, B 111)" (Sutherland, 2006, p. 542).[35]

Pero aquí sucede lo siguiente, la formulación de un juicio universal que establece que todo número siete lo podemos obtener de diferentes sumas, como la de 2 + 5 o 6 + 1 o cualquier otra combinación. Para poder formular tal juicio, el entendimiento debe haber elaborado el concepto puro de totalidad, es decir, un concepto puro que el entendimiento puro produce a partir de lo diverso, en este caso de las múltiples posibilidades para que se tenga que hallar el número 7, y esto en estrecha relación con la forma lógica de los juicios. Por ejemplo, pensemos en el juicio "6 + 1= 7". Ello es un juicio universal que se relaciona con la categoría de totalidad de cantidad, pues el total de veces que mencionemos dicho juicio universal en cualquier lugar, será el total de veces que siempre arroje la misma cantidad.

El segundo tópico a tratar es cómo entiende Sutherland *La aritmética y el número en Kant*. Él habla de tres puntos de vista que se tienen sobre este tópico de la filosofía de Kant el primero:

> "El primer problema fue que Kant no explica nuestra cognición de números por apelación a la cognición de longitudes. En cambio, sus discusiones de cognición aritmética apelan a magnitudes discretas como dedos o puntos. Además, como se explica en la sección 2.3, Kant cree que la síntesis de la composición subyacente aritmética es una síntesis de unidades discretas y discontinuas (CPR, B 15, A 164/B 205, A 170 – 71/B 212, A 240/B 299; 4:283). Por último, afirma explícitamente en la *Crítica* que hay una unidad que conecta con cada número (CPR, un 212 170 – 71/B). Por último, afirma explícitamente en la *Crítica* que hay una unidad que conecta con cada número (CPR, un 212 170 – 71/B)" (Sutherland, 2006, p. 542).[36]

---

[35] "[…] a *complementum ad totum* is required, so that 3 and 4 compose the complementary parts of the whole number 7. In the A-Deduction as well, Kant implies that a number requires being seen as a whole (*CPR*, A 99). Moreover, following the table of categories in §11, he states that number belongs to the category of totality, by which he means that number requires not merely a multitude of parts, but a cognition of the whole, which is made possible by the category of totality (*CPR*, B 111)."

[36] "The first problem was that Kant does not explain our cognition of numbers by appeal to the cognition of lengths. Instead, his discussions of arithmetical cognition appeal to discrete magnitudes such as fingers or

Esta posición lleva a Sutherland a sostener que

> "[…] los puntos de vista de Kant reflejan la concepción griega de números en lugar de los modernos. Kant admite números racionales, que puede expresarse como una relación de dos números que constan de unidades. Sin embargo, él no admite números irracionales, como afirma en la carta de 1790 a Rehberg relativas a la representación de quantities irracionales. […] Kant se adhirió a la concepción griega más tradicional de número (Sutherland, 2006, p. 554).[37]

A pesar de lo vertido, en una nota a pie de página este autor sostiene que

> "Kant no dice que no hay números irracionales. Afirma que no hay ningún número que puede encontrarse y que clara y completamente representa una magnitud irracional en conceptos. Luego afirma que "[A]l comprender... no puede dar el concepto de número completo, pero deben acceder al entrar en una aproximación al número infinito..." (11:208). Nota que Kant llama a lo que se aproxima a un 'número'. […] Por otra parte, en un borrador de su carta, Kant niega que un número irracional es un número (14:57). Puesto que esto es lo que estrictamente es requerido por su definición del número, es muy probable lo que quería decir" (Ídem, p. 554).[38]

Si bien recordamos que este punto ha sido trabajado por nosotros en el segundo capítulo, nuestra intención aquí es hacer mención que estos son unos de los límites que encontramos en Sutherland. Así bien, es fácil referirse a lo que Kant pretendía sostener cuando pensamos en sus afirmaciones. No obstante, Sutherland se queda corto en este punto, pues no llega a discernir por qué Kant le da más preferencia a los números enteros (naturales), como él mismo le llama, o

---

dots. Furthermore, as explained in Section 2.3, Kant thinks that the synthesis of composition underlying arithmetic is a synthesis of discrete and discontinuous units (*CPR*, B 15, A 164/B 205, A 170–71/B 212, A 240/B 299; 4:283). Finally, he states explicitly in the *Critique* that there is a unity grounding every number (*CPR*, A 170–71/B 212)".

[37] […] Kant's views reflect the Greek conception of number rather than the modern. Kant allows rational numbers, which can be expressed as a ratio of two numbers consisting of units. He does not, however, admit irrational numbers, as he states in the 1790 letter to Rehberg concerning the representation of irrational quantities. […] Kant adhered to the more traditional Greek conception of number.

[38] Kant does not quite say that there are no irrational numbers. He states that no number can be found which *clearly and completely* represents an irrational magnitude in concepts. He then states that "[t]he understanding … cannot bring forth the *complete* number-concept, but must accede to entering into an infinite approximation to the number …" (11:208). Note that Kant calls that which is approached a 'number.' […] Moreover, in a draft of his letter, Kant does deny that an irrational number is a number (14:57). Since this is what is strictly required by his definition of number, it is most likely what he meant.

esta posición más griega que moderna. El punto está en que se debe tomar en cuenta que la operación más elemental de todas las operaciones aritméticas es la suma, que está incluso antes de cualquier otra operación matemática, por supuesto antes de la suma de fracciones, por lo cual las demás operaciones recaen y se basan bajo los conocimientos de la primera, la suma.

"El segundo problema concierne en referencia de Kant a Nichomachus, Diophantus, y Psellus. ¿Por qué Kant se referiría a esta tradición aritmética, que era distinta de la tradición euclidiana, si creía que la cognición matemática fue basada en la teoría Eudoxian de proporciones?" (Ídem, p. 555).[39]

El mismo autor sostiene que

> "Kant hace suya la concepción griega del número como una serie de unidades; esta es una concepción que tanto la euclidiana y la tradición aritmética comparten. Los dos enfoques difirieron de manera importante: los objetivos de Euclides eran muy diferentes a los de los aritméticos griegos, y Euclides tomó solo números enteros, mientras que los últimos admitieron relaciones. Sin embargo, las propuestas de los libros aritméticos de Euclides (que aplican la teoría de proporciones para el caso especial de números) fueron consistentes con las afirmaciones de la tradición aritmética. […] Así, Kant sostiene que, a pesar de su temprana divergencia, la tradición aritmética y la teoría euclidiana de proporciones son dos rutas a la misma visión de las matemáticas — una opinión basada en la naturaleza de magnitudes" (Ídem, p. 555).[40]

Así pues, sostenemos lo mismo que lo anterior, que Kant más que estar preocupado en los números vertidos por los griegos y por Euclides y apoyarlos, era simplemente porque esto es el inicio que permite explicar la operación

[39] The second problem concerned Kant's reference to Nichomachus, Diophantus, and Psellus. Why would Kant refer to this arithmetic tradition, which was distinct from the Euclidean tradition, if he thought that mathematical cognition was grounded in the Eudoxian theory of proportions?

[40] As noted, Kant endorses the Greek conception of number as a collection of units; this is a conception that both the Euclidean and the arithmetic tradition shared. The two approaches did differ in important ways: the aims of Euclid were very different from those of the Greek Arithmeticians, and Euclid took only whole numbers to be numbers, while the latter admitted rationals. Nevertheless, the propositions of Euclid's arithmetical books (which apply the theory of proportions to the special case of numbers) were consistent with the claims of the arithmetic tradition. […] Thus, Kant holds that, despite their early divergence, the arithmetical tradition and the Euclidean theory of proportions are two routes to the same view of mathematics—a view based on the nature of magnitudes.

matemática de tipo más elemental que pueda haber. Esto es propiamente la suma.

El tercer problema concierne a la homogeneidad. La interrogante que se hace Sutherland es que si la intuición es o no necesaria para la representación de las magnitudes (cantidades) discretas de la aritmética. "¿[…] La intuición no es necesaria para la representación de las magnitudes discretas de la aritmética?" (Ídem, p. 555). La respuesta del mismo autor sobre Kant es que "aunque Kant no piensa en números representados por longitudes, que aún mantienen que la aritmética se fundamenta en la representación de una homogeneidad estricta. Las unidades homogéneas a que se refiere Kant difieren entre sí numéricamente pero no cualitativamente" (Ídem, p. 555). Así bien, para Sutherland "Kant piensa que el propio espacio nos da multiplicidad y diferencia numérica; la homogeneidad estricta del espacio permite diferenciar estos discretos y desconectados objetos cualitativamente idénticos" (Ídem, p. 556). Sutherland se vale del siguiente pasaje para afirmar ello:

> "La multiplicidad y diferencia numérica ya están dadas por el espacio mismo como la condición de las apariencias externas. Por una parte del espacio, aunque podría ser totalmente similar e igual a otra, es sin embargo, fuera de ella y es por esa misma razón una parte diferente de la que se apoya en ella para constituir un espacio más grande. (CPR, A 264/B 320)" (Ídem, p. 556)

En realidad, lo que versa en ese pasaje es exactamente lo siguiente:

> "[…] la pluralidad y la diversidad numérica es dada ya por el espacio mismo, como condición de los fenómenos externos. Pues una parte del espacio, aunque sea enteramente semejante e igual a otra, está, sin embargo, fuera de ella, y precisamente por eso una parte diferente de la primera, a la que se añade para constituir un espacio mayor; y por eso, esto debe valer para todo aquello que es simultáneo en los múltiples lugares del espacio, por mucho que ello sea, en otros respectos, semejante e igual" (CPR, A 264/B 320).

Según Sutherland:

> "en sus conferencias sobre metafísica, Kant afirma que la diferencia numérica es una diferencia de varias instancias de una especie menor, que incluye una diferencia entre objetos discretos, cualitativamente idénticos. Kant afirma entonces que la homogeneidad de magnitudes es la diferencia numérica sin diferencia cualitativa (28:504, 1780s tarde). El conteo de Kant es general así la homogeneidad de magnitudes discretas también consiste en la diferencia numérica sin diferencia cualitativa" (Sutherland, 2006, pp. 556-557)

A lo que Sutherland hace referencia es que, para Kant, se puede sumar distintas cantidades independientemente del valor representativo de los objetos en que se estén vinculando. Así, lo que se suman, no son cualidades de los objetos sino los objetos mismos, representados mediante números. Por eso habla de la homogeneidad entre cantidades (magnitudes), pues podemos sumar 5+7=12. Ambas cantidades son homogéneas en el sentido de representación numérica, mas no en representación cualitativa de los objetos, porque pueden estar representando cosas distintas.

> "Estas características de la filosofía de la aritmética de Kant explican por qué Kant es reacio a permitir números irracionales y piensa que la geometría tiene un papel que desempeñar en la que nos muestra que el concepto de √2 no es un concepto vacío.[41] El concepto de número en una unidad de base implica que nosotros no podemos representar √2 como un concepto completo; lo mejor que podemos hacer siempre será una aproximación. Sin embargo, podemos aplicar aritmética a longitudes y demostrar que la relación entre el lado de un cuadrado y su correspondiente diagonal a √2 y por lo tanto que la diagonal de un cuadrado es una determinada representación de un objeto correspondiente al concepto √2" (Ídem, pp. 557-558).

Aquí cabe sustentar que Kant no es reacio a permitir números irracionales, solo sostiene que se derivan de una forma muy particular, y que no son de carácter natural, pues el hombre no aprende a sumar con ellos, sino que en el desarrollo de los números se encuentra con ellos. Por lo cual, esa es la razón que no es un concepto vacío y que gracias a la ayuda de la geometría nos permite dicha demostración.

[41] La carta de Kant a Rehberg, Septiembre 25, 1790 (11:208, 14:57). Véase la nota 76 supra.

Finalmente, nos quedamos con la parte final del ensayo de Sutherland que, a resumidas cuentas, es la visión que él tiene de la aritmética por parte de Kant:

> "Un relato más complejo de la filosofía de Kant de la aritmética emerge de lo que uno podría haber esperado. Kant no simplemente asimila la aritmética en la teoría de magnitudes por pensar en números representados por longitudes y pensando en la aritmética como una especie de medición. Él conserva la concepción tradicional de los números, requiriendo una unidad". (Ídem, pp. 558)

Y en efecto, en Kant es muy importante la unidad. Pero lo que cabe remarcar aquí, es que, a partir de dicha unidad, a partir de las unidades positivas, es el camino para cosas más complejas que la misma aritmética nos pueda deparar, como los números irracionales, por ejemplo.

3. Sobre el carácter de la intuición de la aritmética en Kant, según Kristina Engelhard y Peter Mittelstaedt

En el 2008 aparece en *Journal for general philosophy of science* un artículo llamado *Kant's theory of arithmetic: A constructive approach?* (*La teoría de la aritmética de Kant: ¿un enfoque constructivo?*), curiosamente escrito por dos filósofos Kristina Engelhard y Peter Mittelstaedt. Siguiendo la introducción, los autores presentan lo siguiente:

> "El objetivo de este artículo es mostrar que al menos algunos detalles importantes de la teoría de la aritmética de Kant se pueden recoger, mejorados por la reconstrucción […] [Así bien], un enfoque de nuestra interpretación es sobre las tesis de Kant de que los juicios o fórmulas aritméticas son sintéticos a priori, que ha sido objeto de críticas especiales. Sin embargo, nosotros tomamos el carácter sintético de la aritmética de ser una inferencia a la mejor explicación como la solución a los problemas anteriormente llamados con nombre en la filosofía de las matemáticas. Tratamos de demostrar que también es internamente

> justificable asumir un enfoque constructivo." (Engelhard (y) Mittelstaedt, 2008, pp. 245- 246).[42]

El trabajo de ambos autores se divide en 5 partes, incluida la introducción, pero es en la segunda parte, más precisamente en 2.2 *Las dos tesis básicas del pensamiento de Kant acerca de las matemáticas,* donde algunas observaciones saltan a nuestra vista. A nuestro parecer es un tema no muy bien abordado lo que se comenta de Kant. Engelhard y Mittelstaedt sostienen dos tesis básicas de la teoría de la aritmética de Kant. La primera es que los juicios en la aritmética son sintéticos a priori, al modo de Kant, y la segunda es que la intuición es el elemento a partir del cual se procede en la construcción de la aritmética. Vamos a mostrar algunas observaciones a ambas posiciones. Así bien, empezando este primer punto, los autores empiezan sosteniendo que "la tesis predominante de la teoría de las matemáticas de Kant es su afirmación de que todos los juicios matemáticos son a priori y que la mayoría de ellos son sintéticos (CPR, B 14 y sig.)" (Ídem, p.250).[43] En nota a pie de página comentan que Kant "sus ejemplos para los juicios analíticos en matemáticas son las formulas algebraicas cómo 'a = a' o '(a + b) > a'" (Ídem, p.250).[44] En realidad, los autores están haciendo referencia al siguiente párrafo:

> "Algunos pocos principios que presuponen los geómetras son, por cierto, efectivamente analíticos y se basan en el principio de contradicción; pero, como proposiciones idénticas, solo sirven para la concatenación del método, y // no como principios; p. ej. a = a, el todo es igual a sí mismo, o (a + b) > a, es decir, el todo es mayor que su parte. Y aún estos mismos, sin embargo, aunque posean validez según meros conceptos, son admitidos en la matemática solo porque pueden ser exhibidos en la intuición. Lo que aquí comúnmente nos hace creer que el predicado de tales juicios apodícticos reside ya en nuestro concepto, y que por tanto el

---

[42] "The goal of this article is to show that at least some important details in Kant's theory of arithmetic can be picked up, improved by reconstruction […]
A focus of our interpretation is on Kant's theses that arithmetic judgments or formulas are synthetic a priori which has been object of special criticism. We, however, take the synthetic character of arithmetic to be an inference to the best explanation as the solution to the above named problems in the philosophy of mathematics. We try to show that it is also internally justifiable to assume a constructive approach"

[43] "The predominant thesis of Kant's theory of mathematics is his claim that all mathematical judgments are a priori and that most of them are synthetic (CpR, B 14 ff.)".

[44] "His examples for analytic judgments in mathematics are algebraic formulas like 'a = a' or '(a + b) > a'"

> juicio es analítico, es solamente la ambigüedad de la expresión. Pues *tenemos* que añadir con el pensamiento, a un concepto dado, cierto predicado; y esta necesidad está en los conceptos. Pero la cuestión no es: qué *tenemos que añadir con el pensamiento* el concepto dado; sino: qué *pensamos efectivamente* en él, aunque de manera oscura; y allí se pone de manifiesto que el predicado está, por cierto, ligado necesariamente a aquellos conceptos, pero no porque esté pensado en el concepto mismo, sino por medio de una intuición que debe añadirse al concepto" (Kant, 2009, B17).

Aquí sucede lo siguiente, si Kant hizo la distinción de dos tipos de juicios, juicio analítico y juicio sintético, era para dar esclarecimiento a la distinción que había en su época, las verdades de razón y las verdades de hecho de Leibniz. Sin embargo, el mismo Kant sostuvo juicios sintéticos a priori y además que dichos juicios son verdaderos, y que en ellos se filtra la raíz común: los sentidos y la razón. En otras palabras, para que un matemático relacione de manera correcta y diga 'a = a' primero ha tenido que saber lo que es 'a', lo que representa, o aprender lo que es 'a', que es una letra del alfabeto y después que es una letra de representación de un objeto. Va en sentido lato la palabra objeto.

En el caso del signo '=' sucede que tiene que saberse lo que dichos "trazos" significan: que es una equivalencia, que ello señala igualdad a ambos lados del signo y por ende se está hablando de lo mismo o mejor dicho se identifica a lo mismo. Si nos damos cuenta es una construcción, que a su vez se ha ido descubriendo, pero de dicho conocimiento se hace una construcción del mismo. Más aún, no se parte sin nada, sino sabiendo lo que es 'a' y sabiendo lo que es '='. Lo mismo sucede cuando un matemático afirma '(a + b) > a' sabe lo que ello representa, siempre y cuando sabe lo que representa cada una de las letras de los símbolos '+' '>'. Si sabe lo que la expresión denota, en consecuencia, sabe lo que dicha expresión quiere decir o significa. Entonces, esto surge con conocimientos previos y es nuestra mente que se da cuenta del proceder para elaborar dichas fórmulas. Sentado esto, decimos por ello que el último párrafo citado de Kant concluye sosteniendo que si bien el predicado se halla necesariamente ligado a dicho concepto, es decir, el sujeto no lo está en cuanto pensado en este último, sino gracias a una intuición que ha de añadirse al concepto.

Pero hay algo más que la intuición, y eso Engelhard y Mittelstaedt lo reconocen. Por ello, continúan su análisis con el concepto de lo a priori y el sentido que toma la universalidad y necesidad dentro de las matemáticas, así llegan a sostener que la afirmación de Kant de "si el conocimiento matemático, se ganara a través de la experiencia no tendría autorización a afirmar universalidad y de ahí la necesidad, porque el conocimiento por experiencia es singular […]" (Engelhard (y) Mittelstaedt, 2008, p. 250).[45] Con esto último estamos de acuerdo. Además, como refieren ellos de Kant, el conocimiento matemático y la estructura de sus fórmulas refieren una necesidad, y ello es lo que deriva a una universalidad. Así ambos autores sostienen que

> "la verdad necesaria de conocimientos matemáticos básicos no tiene su origen en la ley de la no contradicción como lo hace la necesidad de verdades analíticas; esto va más lejos, más se apoya en el hecho de que los objetos de las matemáticas no son objetos empíricos, sino los objetos de la intuición pura, como el "triángulo" o el número '7'. Finalmente el derecho del conocimiento matemático para reclamar a prioridad se apoya sobre un método matemático basado esencialmente en la intuición pura (CPR, B XI) (Ídem, p. 250).[46]

Con respecto a este punto, Kant sí hace referencia a que, mediante la ley de la no contradicción, funcionará, en parte, las verdades analíticas. Pero, que las matemáticas sean objetos únicamente de la intuición pura, es un tanto desconcertante[47]. No obstante, lo que sí aparece en Kant es el famoso ejemplo de

---

[45] "If mathematical knowledge where gained through experience it would not be entitled to claim universality and hence necessity, because knowledge through experience is singular […]"

[46] "The necessary truth of basic mathematical knowledge does not have its source in the law of non-contradiction as does the necessity of analytic truths; it furthermore rests on the fact that the objects of mathematics are not empirical objects, but objects of pure intuition, like 'triangle' or the number '7'. Finally mathematical knowledge's entitlement to claim apriority rests on a mathematical method essentially based upon pure intuition (CpR, B XI)"

[47] Lo que aparece solamente es esto: "La *matemática,* desde los tiempos más antiguos que alcanza la historia de la razón humana, en el admirable pueblo de los griegos, anduvo por el camino seguro de una ciencia. Pero no se ha de pensar que le haya sido tan fácil como a la lógica, en la que la razón sólo tiene que ocuparse consigo misma, encontrar ese camino real, // o más bien abrírselo a sí misma: creo, más bien, que durante mucho tiempo (especialmente entre los egipcios) no hizo más que tanteos, y que esa transformación hay que atribuirla a una *revolución* producida por la feliz ocurrencia de un único hombre en un ensayo a partir del cual ya no se podía errar el rumbo que se debía tomar, y la marcha segura de una ciencia quedó trazada y emprendida para todos los tiempos y hasta las infinitas lejanías. La historia de esta

cómo se conoce un triángulo. Así bien, es a priori lo que se coloca en él dando cuenta el sujeto mismo de lo que tiene al frente, dando cuenta de lo que es ello.[48]

Si decimos "todo conocimiento ha de tener una explicación", es un a priori puro. Si decimos "todo conocimiento tiene una explicación", es simplemente a priori. En el primer caso, podemos decir que se hace referencia a una visión universal que incluyen los enigmas de la ciencia. En el segundo caso, podemos hacer referencia a una función propia de la ciencia, que es precisamente la explicación. Si lo entendemos de esta forma, comprenderemos que Kant hace referencia al segundo caso, a lo simplemente a priori, y no al a priori puro, cuestión que propiamente se debe distinguir cuando se sustenta que algún tipo de conocimiento se basa, sustenta o tiene un soporte a priori. Por añadidura, ambos lados de lo a priori están bajo las formas puras de la sensibilidad humana (espacio y tiempo), bajo las denominadas también intuiciones puras.

El trabajo de Engelhard y Mittelstaedt refieren que, para Kant, los juicios sintéticos son ricos en su contenido y proporcionan conocimiento, mientras que los juicios analíticos son meras tautologías que ya están en el término sujeto. Una segunda característica señalada es que la verdad de los juicios analíticos está en el principio de contradicción, mientras que la verdad de los juicios sintéticos está en conexión con la intuición y con la experiencia que posibilita ello. Así, la afirmación de verdad de un juicio sintético, que afirma la realidad objetiva, tiene que ser justificado por el objeto al que se refiere. Pero, ¿qué hay con el

---

revolución del modo de pensar, -que fue mucho más importante que el descubrimiento del camino en torno del famoso Cabo [de Buena Esperanza],y la del afortunado que la llevó a término, no nos ha sido conservada. Pero la leyenda que nos transmite *Diógenes Laercio,* quien nombra a los presuntos descubridores de los más pequeños elementos de las demostraciones geométricas, [aun de aquellos elementos] que, según el juicio vulgar, no requieren demostración, demuestra que la memoria de la transformación efectuada por la primera traza del descubrimiento de este nuevo camino debe de haberles parecido extraordinariamente importante a los matemáticos, y que así se volvió inolvidable" (Kant, 2009, BXI).

[48] "El primero que demostró el *triángulo isósceles* (ya se haya llamado *Tales*, o como se quiera) tuvo una iluminación; pues encontró que // no debía guiarse por lo que veía en la figura, ni tampoco por el mero concepto de ella, para aprender, por decirlo así, las propiedades de ella; sino que debía producirlas por medio de aquello que el mismo *a priori* con el pensamiento según conceptos y exhibía (por construcción) [en ella]; y que, para conocer con seguridad algo *a priori*, no debía atribuirle a la cosa nada más que lo que se seguía necesariamente de aquello que él mismo había puesto en ella según su concepto […]"(Idem, 2009, BXII).

conocimiento aritmético? "[…] las entidades matemáticas dependen de la construcción, las afirmaciones de verdad de los juicios aritméticos tienen que ser justificadas por la construcción" (Ídem, p. 251).[49] Entonces, si son justificadas por la construcción, debe ser porque existe algo sintético en ello. En efecto Engelhard y Mittelstaedt sostienen que en Kant hay dos argumentos de lo sintético en las matemáticas, para ser más precisos, en la aritmética. "El primer argumento prima facie es indirecto, ya que apela a la intuición de que la matemática es rico en contenido y en su progresión produce nuevos conocimientos no solo explicaciones de lo que ya se conoce" (Ídem, p. 251).[50] A este tipo de intuición a la que se refieren los autores, es una intuición derivada. Y es que la aritmética, propiamente la suma, nos permite construir otro tipo de operaciones que no se podrían dar si no se conociese ella, como por ejemplo, la resta, la multiplicación y la división. Pensamos que Kant estaría de acuerdo con este punto. "El segundo argumento más fuerte se basa en un análisis de la naturaleza de los números y de los juicios matemáticos. Su ejemplo famoso por mostrar el carácter sintético de los juicios matemáticos es la ecuación aritmética 7 + 5 = 12" (Ídem, p. 251).[51] Aquí está la muy clásica explicación de que 12 no está contenido en 7 + 5 "[…] el concepto '12 ' no implica que es la suma de '5' y '7' […] la suma de 5 y 7 es igual a 12, no es suficiente aplicar la ley de la no contradicción. Además, es necesario llevar a cabo el cálculo de resumir 5 y 7" (Ídem, p. 251).[52] Todo esto lleva a pensar que se necesita de la intuición, y es precisamente el tópico seguido a tratar por ambos autores.

"Debido a lo sintético de los juicios matemáticos, la intuición es necesaria como fuente de evidencia de su verdad. El argumento de Kant para esta

[49] "[…] mathematical entities depend on construction, the truth claims of arithmetical judgments have to be justified by construction".

[50] "The first prima facie argument is indirect as it appeals to the intuition that mathematics is rich in content and in its progression produces new insights not only explicating what is already known".

[51] "The stronger second argument relies on an analysis of the nature of numbers and of mathematical judgments. His famous example for showing the synthetic character of mathematical judgments is the arithmetical equation 7 + 5 = 12".

[52] "[…]the concept '12' does not entail that it is the sum of '5' and '7' […] the sum of 5 and 7 equals 12 it is not sufficient to apply the law of non-contradiction. It is furthermore necessary to carry out the calculation of summing up 5 and 7".

afirmación implica toda la deducción trascendental de las categorías" (Ídem, p. 252).[53] Así es como se empieza hablando sobre la intuición, de la cual se señalan tres características:

> "La intuición es según Kant una especie de representación,[54] que se determina en oposición al concepto: Esto es una representación singular opuesta al concepto como representación universal (B 376 y sig.). Por la representación singular Kant entiende la representación de un objeto individual. Concepto, por otro lado, representa una característica común a muchos objetos debido a la abstracción. Kant caracteriza a la intuición, además, por otras dos características: la inmediatez (B 92 f.) y la entrega receptiva de los objetos de intuición" (Ídem, p. 252).[55] [56]

Engelhard y Mittelstaedt sostienen que "la tesis de la intuición ha sido criticada especialmente en el contexto de la aritmética. Aunque parece que hay más evidencia para la tesis en la geometría, no parece plausible en la aritmética, porque los números no parecen ser objetos esencialmente intuitivos" (Ídem, p. 252).[57] Estas líneas son un poco desconcertantes, pese a que los autores en una

---

[53] "Because of the syntheticity of mathematical judgments, intuition is necessary as the source of evidence for their truth. Kant's argument for this claim involves all of the transcendental deduction of the categories".

[54] El término "representación" es esencial para la filosofía trascendental de Kant, pero no hace referencia a los fenómenos empíricos cognitivos. En consecuencia, la filosofía de Kant no debe tomarse como una especie de representacionalismo, menos opuesto al concepto porque gracias a la recepción de impresiones se abre paso al hallazgo de conceptos, por lo cual una cosa no se opone a la otra.

"The term 'representation' is essential to Kant's transcendental philosophy, but it does not refer to empirical cognitive phenomena. Consequently, Kant's philosophy should not be taken as holding a kind of representationalism".

[55] "Intuition is according Kant a kind of representation, which is determined in opposition to concept: it is a singular representation opposed to concept as universal representation (B 376 f.). By singular representation Kant means the representation of an individual object. Concept, on the other hand, represents a feature common to many objects due to abstraction. Kant characterizes intuition, moreover, by two further features: immediacy (B 92 f.) and receptive giveness of the objects of intuition"

[56] "Pero, esta tercera característica, no está necesariamente relacionada con la intuición. Si, como en los seres humanos, la intuición es sensible, entonces, se le da forma receptiva, mientras que los conceptos se producen de forma espontánea por el entendimiento (CPR, B 33, B 92 y sig.), Pero es posible concebir la intuición intelectual, incluso si esta idea podría no tener sentido para nosotros los seres finitos. " (Ídem, p. 252). (Nota de pie de página de los autores).

"But this third feature is not necessarily connected with intuition: if like in human beings intuition is sensible, then it is given receptively, while concepts are spontaneously produced by the understanding (CpR, B 33, B 92 f.). But it is possible to conceive of intellectual intuition even if this idea might not make sense to us finite beings.

[57] "The intuition-thesis has been criticised especially in the context of arithmetic. While there appears to be more evidence for the thesis in geometry, it seems implausible in arithmetic, because numbers do not seem to be essentially intuitive objects".

nota a pie de página aclaran que "de hecho, Kant no declaró la intuitividad de cualquier número arbitrario, pero enfatiza en varios lugares que se realiza la construcción sucesiva de números de acuerdo a una regla que se realiza en el tiempo, donde el tiempo es considerado como una forma pura de la intuición" (Ídem, p. 252).[58] Esto es cierto, como también que "la plausibilidad de la tesis de la intuición depende de la interpretación del significado básico de "intuición" de Kant" (Ídem, p. 252).[59]

Para ambos autores, en Kant la intuición juega un papel diferente en la experiencia a comparación de lo que sucede dentro de la matemática basada en la intuición pura a priori. Así bien, el funcionamiento de la intuición en el conocimiento matemático se puede dar teniendo en cuenta la teoría de Kant de la construcción por la intuición. Para estos autores, la doctrina de Kant muestra que los objetos matemáticos no son dados a nuestra intuición por la receptividad, sino por la actividad del entendimiento. Así, "en la segunda edición de la primera *Crítica* Kant concibe esta acción del entendimiento en la intuición como afección misma (auto afección) en particular mediante el uso de ejemplos matemáticos (CPR, B 153 y ff.)" (Ídem, p. 253).[60] [61]

Y es que para ambos autores, siguiendo la deducción trascendental de las categorías, "la sensibilidad y el entendimiento deben cooperar de manera específica con el fin de producir el pensamiento de un objeto determinado. Esto

---

58 "Indeed, Kant did not state the intuitiveness of any arbitrary number, but he emphasizes at several places that the successive construction of numbers according to a rule is performed in time, where time is considered as a pure form of intuition".

59 "The plausibility of the intuition-thesis depends on the interpretation of the basic meaning of 'intuition' in Kant".

60 "In the second edition of the first Critique Kant conceives of this action of the understanding on intuition as self-affection in particular by using mathematical examples (CpR, B 153 ff.)"

61 Carson investiga el impacto de la visión cambiante de Kant sobre la naturaleza de la intuición en la diferencia entre la pre-crítica de Kant y su filosofía crítica de las matemáticas (Carson 1999). Ella asume que hay una inconsistencia en los puntos de vista pre-críticos de Kant acerca de las verdades matemáticas indemostrables en base a su teoría de la intuición en aquel momento, que se resuelve por la teoría crítica de la intuición. (Ídem, p. 253). (Nota de pie de página de los autores).

"Carson investigates the impact of Kant's changing view on the nature of intuition on the difference between Kant's pre-critical and his critical philosophy of mathematics (Carson 1999). She assumes that there is an inconsistency in Kant's pre-critical views about indemonstrable mathematical truths on the basis of his theory of intuition at that time, which is solved by the critical theory of intuition."

también es válido para los objetos matemáticos como los números o las entidades a las que las fórmulas aritméticas se refieren" (Ídem, p. 253).[62] Ante lo dicho, ambos autores sostienen que: "La tesis de la intuición contiene dos aspectos: (i) los juicios sintéticos matemáticos necesitan intuición para su justificación; y (ii) las entidades matemáticas deben ser objetos que se pueden dar en la intuición (CPR, B 15, B 299)" (Ídem, p. 253).[63] Ante lo dicho, existe algo muy peculiar en ambos autores, y es que según ellos:

> "la tesis aún más sorprendente de Kant concerniente a la participación de la sensibilidad es que el conocimiento matemático adquiere su significado solo a través de posibles o incluso de lo que es la real experiencia (CPR, A 239 m. / B 298 y sig.) […] Siguiendo esta línea, la tesis de Kant dice: el conocimiento matemático tiene significado si es posible la existencia de un objeto empírico, que cae bajo un cierto concepto matemático. Como un ejemplo, el número '5' tiene un significado si es posible que exista un grupo de ovejas que cae bajo el concepto 'de cinco'. 'En un sentido más complejo, un fenómeno físico general que cumple con una cierta fórmula aritmética o fórmula algebraica que da el formalismo de la aritmética, de la que forma parte, la realidad (Ídem, p. 253)".[64]

Naturalmente, en Kant toda noción, incluso la aritmética, ha tenido que partir de la experiencia. No obstante, no solo se ha hecho con la misma, pues aquí entra a interactuar la espontaneidad propia de la mente humana en el descubrir o, si se quiere, en el construir el conocimiento. Por otra parte, en Kant no es cierto que los números son posibles por verlos en la experiencia, en el mundo exterior, pues no necesariamente todos los números los vemos reflejados en la

---

[62] "Sensibility and understanding have to cooperate in a specific manner in order to produce the thought of a determinate object. This is also valid for mathematical objects like numbers or the entities to which arithmetic formulas refer".

[63] The intuition thesis contains two aspects: (i) synthetic mathematical judgments need intuition for their justification; and: (ii) mathematical entities must be objects that can be given in intuition (CpR, B 15; B 299

[64] "Kant's even more striking thesis concerning the involvement of sensibility is that mathematical knowledge gains its meaning only through possible or even actual experience (CpR, A 239 f./B 298 f.). Following this line, Kant's thesis says: mathematical knowledge has meaning if it is possible that an empirical object exists, which falls under a certain mathematical concept. As an example, the number '5' has a meaning if it is possible that a group of sheep exists that falls under the concept 'five.' In a more complex sense, a general physical phenomenon that meets a certain arithmetic or algebraic formula gives the arithmetic formalism, of which it is part, reality"

experiencia. Yo puedo ver un cuarto de pollo, pero no un cuarto de perro. Por lo cual, los números son reflejados en la experiencia en ciertos objetos que son posibles y otros no. Por último, los autores han venido mencionando la intuición en Kant, pero nunca llegaron a discernir el tipo de intuición. A como nosotros vemos este tema en Kant, lo que entra a tallar es la intuición derivada, la cual al intuir no crea nada, sino solo crea conocimiento producto de percibir un objeto. En otras palabras, gracias a la inferencia, es que podemos extender los números, pero dicha inferencia -en el caso de las operaciones aritméticas- es producto de la intuición derivada.[65]

4. Sobre los equívocos de la interpretación kantiana del juicio 7 + 5 = 12, según Rogelio Rovira

En el 2011 aparece *Kant y las ciencias,* un texto que contiene diferentes artículos sobre la filosofía de las ciencias de Kant. El primer artículo que se desprende de dicho texto es *¿es 7 + 5 = 12 un juicio sintético? Examen de las razones de Kant (y de Schultz).* Lo que haremos a continuación será una serie de observaciones a las críticas vertidas por el autor del mencionado artículo. En la introducción de los supuestos equívocos kantianos se habla del peculiar juicio 7 + 5 = 12 y su particular forma de interpretar este y otros juicios análogos. Así bien, el autor critica lo siguiente sobre ello

> “Esta interpretación no logra evitar por completo tres ambigüedades fundamentales, cuando menos, que en ocasiones conducen a un debilitamiento o incluso a una anulación de la fuerza demostrativa de los argumentos en favor del carácter sintético de los juicios aritméticos. La primera de tales ambigüedades se refiere al sentido del signo “+”. La segunda, al significado del signo “=”. Y el tercer equívoco, en fin, concierne a la naturaleza de los términos mismos del juicio en cuestión, o sea, del 7,

[65] En la filosofía de Kant existen dos tipos de intuiciones, derivada y originaria. La primera es partícipe del conocimiento en el sujeto, la segunda (originaria) es intelectual y corresponde al sujeto cuando imagina o piensa cosas que van más allá del espacio y tiempo, como la libertad, el alma o Dios.

del 5 y del 12. Consideremos estos equívocos por separado" (Rovira, 2011, p. 26).

A continuación, el autor señala sus críticas sobre el primer punto:

> "1º. No dejará de advertirse que, en las formulaciones literalmente ofrecidas por Kant de los argumentos en favor del carácter sintético de los juicios aritméticos, el signo "+" o, si se quiere, el concepto de suma se toma en dos sentidos distintos. En unos casos, el signo "+" equivale a la conjunción copulativa "y" y entonces suma vale tanto como mera "reunión" (*Vereinigung*) o "composición" (*Zusammensetzung*) de dos números; en otros casos, sin embargo, el signo "+" representa justamente la operación aritmética de la suma, esto es, la "adición" (*Addition*) de dos números" (Ídem, p. 26).

Ante lo señalado sostenemos que el equívoco es realmente un equívoco pero por parte de Rovira. Nuestras razones son que el signo "+" equivale a la conjunción copulativa "y". Entonces, la suma vale tanto como mera "reunión" (*Vereinigung*) o "composición" (*Zusammensetzung*) de dos números. Además de ello, al mismo tiempo, el signo "+" representa la operación aritmética de la suma. Es decir, es la "adición" (*Addition*) de los números, porque la adición no es más que el total de la composición o la reunión de dos números o más. Por lo cual, no podemos desligar la composición y reunión (primer sentido) de la adición (segundo sentido) como lo hace Rovira.

La segunda observación sobre su primer argumento es sobre lo que seguidamente señala Rovira:

> "Entendida la suma en el primer sentido, es, en verdad, muy plausible sostener que 7 + 5 = 12 no es un juicio analítico: el concepto de 7 + 5 es el concepto de un todo cuyas partes son 7 y 5; en ese todo no está, en efecto, el concepto de 12. Pero ¿cómo podríamos entonces establecer realmente el juicio 7 + 5 = 12, o también equiparar el resultado de esa suma a los conceptos de 24 : 2 o de 3 · 4? Claro está que solo si entendemos la suma en el segundo sentido, a saber, como la operación mediante la cual las unidades de dos números se reúnen para formar un solo número, número que, por lo demás, puede también concebirse como el resultado de otras operaciones aritméticas"(Ídem, pp. 26 - 27).

Aquí tenemos que tomar en cuenta que no podemos mezclar 7 + 5 = 12 con 24 : 2 = 12 o de 3 · 4 = 12 ni tampoco si lo quieren 17 - 5 = 12 ¿Por qué? La respuesta es única. No es lo mismo porque todas las operaciones antes señaladas, pese a arrojar el mismo resultado, no se les puede equiparar, no porque una sea suma, la otra división, la otra multiplicación y la otra resta, sino porque una es primero que la otra. Nunca se aprende primero a dividir o a multiplicar o a restar, lo que se aprende primero es a sumar, y con números pequeños, para así proceder después con números grandes. Por lo cual, el número es el resultado de otras operaciones aritméticas, pero siempre y cuando se tenga en cuenta el proceder y el orden de aprendizaje de las diferentes operaciones aritméticas. [66]

El segundo argumento de Rovira está marcado por lo siguiente:

> "2º. En todos los argumentos propuestos por Kant para probar el carácter sintético de los juicios aritméticos que se apoyan en el ejemplo 7 + 5 = 12 y otros ejemplos parecidos, se observa que el signo "=" se interpreta como el "es" de la cópula del juicio. Por esta razón, en efecto, considera Kant que, en el juicio en cuestión, 7 + 5 es el sujeto y 12 es el predicado. Pero, según ha señalado Adolf Reinach, esta interpretación de las ecuaciones aritméticas es de todo punto errónea. El signo "=" representa, no la cópula del juicio, sino un predicado, a saber: justamente la igualdad. Escribe el genial discípulo de Husserl:

> "En el examen de si '7 + 5 = 12' es un juicio analítico o sintético, Kant declara que el 12 no se piensa en el concepto de la suma de 7 + 5. Puede ser. Pero, según me parece, ahí no está en absoluto la dificultad. En los juicios analíticos el *predicado* ha de estar contenido en el concepto del *sujeto.* Ahora bien, en esa proposición el predicado es o la igualdad (y entonces 7 + 5 y 12 son el sujeto) o la igualdad con el 12 (y entonces 7 + 5 es el sujeto). Pero el 12 mismo no puede ser nunca el predicado ni puede ser tratado como tal. Kant habría tenido, por tanto, que preguntar si la igualdad está ya pensada en el concepto de 7 + 5 y 12, o si la igualdad con el 12 está ya pensada en el concepto de 7 + 5; como es claro, a ambas cosas debe responderse negativamente. El equívoco de Kant, y de todos los que discuten la cuestión sobre el mismo fundamento que él, hay que entenderlo únicamente porque acostumbramos a leer el signo '=' como 'es', por lo cual ese signo puede aparecer equivocadamente como la

[66] He ahí la importancia de nuestro subcapítulo 7 del cap. II.

> cópula de la proposición y, en consecuencia, el 12 como el predicado de ella”” (Ídem, pp. 27 - 28).

Esto último resulta no cierto. Se está atacando el juicio kantiano por una cuestión de tipo semántica, pero vayamos más allá de eso. Cuando Kant piensa en 7 + 5 = 12 no es un juicio sintético y tampoco un juicio analítico, y dice que ello es un juicio sintético a priori. Es porque primero interactúa la razón y los sentidos en el aprender humano, en este tipo de operaciones. Por lo cual, el decir “es” tranquilamente podemos decir “nos da” o “tenemos” es la universalidad y necesidad características del juicio analítico que se proyecta en la suma debido a que se cumple siempre en cualquier parte dicho resultado y porque el juicio es extensivo. El resultado de la suma nos dice algo más de lo que nos dice los dos números sumados (o también tres o más números sumados).

Vertida esta opinión de Rovira sobre Reinach, se hace también un hincapié en el principio de identidad:

> “Pero, aun cuando la observación de Reinach resulte acertada y sea necesario reformular los argumentos de Kant en el sentido indicado, queda todavía sin resolver una cuestión. ¿Cómo es posible que la igualdad entre dos cantidades, es decir, la conveniencia entre lo cuantitativo, no se funde en el principio de identidad, en el que se basan precisamente todos los juicios analíticos?” (Ídem, p. 28).

La igualdad no se agota en el principio de identidad, va más allá de dicho principio. Por ejemplo, si los alumnos dicen ‘el profesor David es igual al profesor Juan’, será dicho por un motivo, tal vez porque ambos dictan el mismo curso y explican de la misma forma, pésimamente, medianamente o excelentemente. Lo mismo ocurre cuando decimos el río Chili, el río Cañete y el río Rímac son iguales ¿En qué sentido? En que son ríos que además se caracterizan por desembocar en el mar del Pacífico. Es decir, la igualdad depende de las cosas que se estén analizando o, si se quiere, depende del contenido de las cosas, como es el caso de los ríos o los números. Por eso, también en los juicios sintéticos recae lo contingente a la par de lo extensivo, universal y necesario, sin entrar en contradicción alguna. ¿Por qué? Es la experiencia que nos hace ver ese análisis y es la razón la que nos hace dar cuenta que esto de contingente extensivo puede lidiar perfectamente con lo de universal y necesidad.

Así bien, para terminar el tercer argumento de Rovira, sostiene lo siguiente:

> "3º. Hay todavía un equívoco que subyace a todos los argumentos estudiados y que se hace evidente cuando se repara en una vacilación terminológica presente en las formulaciones de Kant. Al considerar el juicio 7 + 5 = 12, unas veces, en efecto, Kant se refiere al 7, al 5 y al 12 calificándolos de conceptos o representaciones y otras, en cambio, de números. Valgan como única muestra de ello las palabras ya citadas con que Kant enuncia el argumento *ex resolutione* en la Introducción de su obra capital. En ese lugar afirma que "el concepto de la suma de 7 y 5 no encierra nada más que la reunión de ambos *números* en uno solo", pero añade a renglón seguido que "el *concepto* de doce no es, en modo alguno, pensado ya en el pensamiento de aquella reunión de siete y cinco".[67]
>
> Es obvio, sin embargo, que no se suman los conceptos de los números, sino los números mismos. En la ecuación 2 + 2 = 4 se suma un 2 a otro 2, y ello porque el número 2, como todo número, posee una individualidad que permite su repetición. No puede sumarse el concepto de 2, justamente porque solo hay uno. El número 2 puede ser muchas veces 2, pero no hay dos conceptos de 2. Y aun en el imposible caso de que los hubiera, la suma de ellos daría justamente 2, esto es, dos conceptos de 2, pero nunca 4" (Ídem, pp. 28-29).

Esto parte de una premisa que vacila por sí sola, que Kant se refiera al 7, al 5 y al 12 algunas veces como conceptos, representaciones y otras veces como números y no asumir el por qué es un tanto desconcertante. Si pensamos o hablamos de un número, hablamos de una representación de objeto concreto o abstracto. Y si lo vemos como tal, es una conceptualización. En consecuencia, cuando hablamos de número, proyectamos una representación en él y, al hacerlo, trae como resultado precisamente el trabajar con un concepto.

> "Ahora bien, la distinción de los juicios en analíticos y sintéticos se basa en la relación entre los conceptos que forman el sujeto y el predicado del juicio, pues, como enseña Kant, esa relación solo es posible de dos maneras: "o bien el predicado B pertenece al sujeto A como algo contenido (ocultamente) en ese concepto A; o bien B está enteramente fuera del

[67] Las cursivas son propias de Rovira, así lo hace saber él también, pues no aparecen originalmente en Kant.

> concepto A, si bien en enlace con él"22. ¿Es entonces lícito hablar de juicios sintéticos cuando su sujeto y su predicado no son —no pueden ser— conceptos, sino que son números? (Ídem, p. 29)"

De la crítica anterior, simplemente añadimos que número al definirlo como concreto o abstracto ya estamos haciendo de él un concepto. Por lo cual, no estamos ante conceptos cualquiera, ni tampoco son conceptos vacíos. Kant los trata como conceptos por precisamente ser números dados.

Pero todavía hay más sobre este asunto:

> "Planteemos la cuestión todavía de otro modo. Como es sabido, Kant sostiene que "el número no es otra cosa que la unidad de la síntesis de lo múltiple de una intuición homogénea en general, por la cual produzco yo el tiempo mismo en la aprehensión de la intuición". ¿No identifica entonces Kant erróneamente la síntesis de la adición sucesiva de unidades homogéneas, que da lugar al número, con la síntesis de dos conceptos que no están contenidos el uno en el otro, síntesis que da lugar a los llamados juicios sintéticos?"

Aquí hay algo que aclarar. Una cosa es decir que el número es la unidad de la síntesis, de lo múltiple, de una intuición homogénea en general, y otra cosa es decir la síntesis de la adición sucesiva de unidades homogéneas da lugar al número. Lo que sucede primero es que el sujeto es quien determina un objeto y de ahí lo determina como uno y hace lo mismo con el siguiente (partiendo siempre de uno hacia adelante). Por lo cual, la síntesis de la adición sucesiva de unidades homogéneas, que da lugar al número, no da lugar a este en sentido estricto, sino da lugar al número en sentido lato. No lo crea, sino lo recrea.[68] Por ello, la síntesis de dos conceptos numéricos que no están contenidos el uno en el otro da lugar a lo sintético.

> "En conclusión, el descubrimiento de los equívocos que están en la base de las razones por las que Kant afirma que 7 + 5 = 12 es un juicio sintético conduce ineludiblemente, en último término, al planteamiento de tres graves y elementales cuestiones de filosofía de la aritmética. ¿Qué es propiamente sumar? ¿En qué consiste la igualdad numérica? ¿Qué es el

[68] Recordemos lo que dijimos en el capítulo anterior. El hombre, al inicio, para poder contar, empezó hacer marcas sobre algo, para contar objetos.

> número? Solo una respuesta a estas cuestiones atenida escrupulosamente a los datos podrá aclarar la naturaleza de la aritmética y, en general, de las matemáticas, de “ese brillante ejemplo” —al decir de Kant— “de cuán lejos podemos ir en el conocimiento *a priori*, independientemente de la experiencia”. Y la aclaración buscada no ha de proseguir necesariamente el camino iniciado por Kant” (Ídem, p. 29).

Las preguntas son interesantes, pero son eso y nada más. El saber con plenitud lo que es un número implica llegar a conocer “el noúmeno”, pero es el caso que en la filosofía de Kant solo se conoce el fenómeno, es decir, las apariencias. La suma sigue siendo como tal, en nuestra vida cotidiana y, en la matemática clásica, 7 + 5 la suma, adición o reunión de ello seguirá siendo 12. El número seguirá siendo la simbolización representativa de una cantidad dada o recogida de una multiplicidad dada. La igualdad seguirá asumiéndose como la equiparidad entre dos cantidades de números con otra. El sumar seguirá siendo en sentido estrictamente kantiano, no algo que esté de por sí en la mente, tampoco algo que el hombre encuentra en el mundo exterior. El sumar es producto de una interacción de la mente humana, un proceso hecho que al mismo tiempo implica el accionar de nuestros sentidos. He allí la razón de sostener que es un juicio sintético a priori, no un juicio analítico y, mucho menos, como señala Rovira, de tildarlo como un juicio sintético (así lo vemos en él desde el título, por cierto cuestión errónea). Por lo cual, el sumar es un proceso que implica tomar en cuenta algo muy simple. El primer instante que el hombre realizó una suma o el instante que alguna vez aprendimos a sumar nunca nos dijeron 2 +2 = 4; 4 + 4 = 8; 8 + 8 = 16. Sucedió que nos hicieron intuir con dos objetos a cada lado y nos dijeron que la suma, la adición, aquello que veíamos que se reunía, nos daba 4. Precisamente nuestros sentidos así lo veían y nuestra mente fue procesando ello. Nuestra mente e imaginación lo fue reproduciendo desde entonces, y hasta ahora lo hace en dicha forma Y como tenemos no una imaginación reproductiva, sino productiva, es decir, activa, es por ello que podemos hacer lo que normalmente se llama inferencia, el ir más allá y trabajar con números de cifras mucho más grandes u otros distintos a los naturales como fracciones o raíces.

En conclusión, haciendo un resumen de este capítulo, Robert Hanna no distingue entre los inicios de la matemática y su estructura piramidal de la misma. Piensa, además, que los conceptos matemáticos son creaciones propias del sujeto. Asimismo, traza innecesariamente una cognición específicamente matemática en distinción de una cognición arbitraria (consensual) de la misma. Esto tiene como consecuencia que, dentro del tópico sobre la construcción conceptual, de la cual habla Hanna, este no toma en cuenta la referencia de la generación de conceptos, que no es más que la forma como Kant expone los juicios sintéticos a priori en la aritmética. Así bien, Hanna no llega a percibir, con precisión, en la filosofía de Kant, cómo el sujeto enrumbó el camino de las operaciones en la aritmética, partiendo desde la suma, tampoco llega a percibir lo que hay en los juicios dentro de esta operación en donde finalmente se haya la conceptualización, por parte del sujeto que, cuando aprende, empieza a definir, conceptualizar, los saberes mediante juicios. Así pues, esto son los lineamientos que no se toman en cuenta sobre la generación de conceptos en matemática que hace referencia Kant.

Por último, construir un concepto, como numérico, consiste en que de la imaginación productiva (imaginación trascendental) se desprende un aspecto sintético productivo del mismo. ¿Cómo se da esto? Producto de haber conocido un saber. En este caso, es la suma de números, pero de esto se puede ir más allá, desarrollar ese saber. Hanna ni siquiera lo toma en cuenta y asume la imaginación pura, a secas, sin tomar en cuenta sus aspectos de la misma. Finalmente, lo interesante de Hanna es el reconocer que la aritmética para Kant no es solo una ciencia exacta, sino también, fundamentalmente, una ciencia humana.

En la segunda parte de este capítulo, vimos dos tópicos de Daniel Sutherland. El primero es *Kant sobre la cognición matemática de proposiciones aritméticas* y el segundo es *La aritmética y el número en Kant*.

Sobre lo primero que vimos, es que Sutherland no toma en cuenta la formulación de un juicio universal, en estrecha relación con la categoría de totalidad de cantidad. Así bien, el total de veces que mencionemos 7 + 5 = 12 -ello en principio será un *juicio* universal en cualquier lugar-, además será el *total* de veces que siempre arroje la misma cantidad.

Del segundo tópico lo dividimos en tres puntos: el primero es que Kant no explica la cognición de números y a ello se le suma un segundo punto en la tradición aritmética. Sutherland no llega a discernir por qué Kant le da más preferencia a los números enteros (naturales), como él mismo le llama, o esta posición más griega que moderna. A nuestro modo de ver, el punto está en que se debe tomar en cuenta que la operación más elemental de todas las operaciones aritméticas es la suma, que está incluso antes de cualquier otra operación matemática, por supuesto, antes de la suma de fracciones, por lo cual, las demás operaciones recaen y se basan bajo los conocimientos de la primera, la suma.

El tercer problema es concierne a la homogeneidad. Sostenemos, en contraposición de Sutherland, que Kant no es reacio a permitir números irracionales. Solo sostiene que se derivan de una forma "singular" y que no son de carácter natural, pues digamos que el hombre no aprende a sumar con ellos, sino que en el desarrollo de los números se encuentra con ellos. Por lo cual, esa es la razón de que no sea un concepto vacío.

En tercer lugar, vimos a dos filósofos Kristina Engelhard y Peter Mittelstaedt nuestro interés radicó en dos tópicos. El primero es que los juicios en la aritmética son sintéticos a priori al modo de Kant y el segundo es que la intuición es el elemento a partir del cual se procede en la construcción de la aritmética.

Así bien, empezando el primer punto, los autores sostuvieron que la tesis predominante de la teoría de las matemáticas de Kant es su afirmación de que todos los juicios matemáticos son a priori y que la mayoría de ellos son sintéticos. Nuestra observación va por este lado, si Kant hizo la distinción de dos tipos de juicios, juicio analítico y juicio sintético, era para dar esclarecimiento a la distinción que había en su época, las verdades de razón y las verdades de hecho de Leibniz. Sin embargo, el mismo Kant sostuvo juicios sintéticos a priori y además que dichos juicios son verdaderos, y que en ellos se filtra la raíz común: los sentidos y la razón.

¿Cómo funciona todo esto en mención? En el caso de lo que se denomina ‘=’ ocurre que tiene que saberse lo que dichos “trazos” significan, que es una equivalencia, que ello señala igualdad a ambos lados del signo y por ende se identifica a lo mismo. Si nos damos cuenta, es una construcción, que a su vez se ha ido descubriendo, pero de dicho conocimiento se hace una construcción del mismo. Sin embargo, no se parte sin nada, sino sabiendo lo que es, en este caso es ‘=’. Lo mismo sucede cuando un matemático afirma ‘(a + b) > a’ sabe lo que ello representa, siempre y cuando sabe lo que representa cada una de las letras y también los símbolos ‘+’ ‘>’. Si sabe lo que la expresión denota, entonces, sabe lo que dicha expresión quiere decir o significa. Esto surge con conocimientos previos ¿en qué sentido? Es nuestra mente que se da cuenta del proceder para elaborar dichas fórmulas. Sentado esto, decimos por ello que Kant concluye sosteniendo que, si bien el predicado se halla necesariamente ligado al sujeto, no lo está en cuanto pensado en este último, sino gracias a una intuición que ha de añadirse al concepto.

Por último, los autores sostienen la intuición en Kant, pero nunca llegaron a discernir el tipo de intuición. A como nosotros vemos este tópico, lo que entra a tallar en Kant es la intuición derivada, la cual al intuir no crea nada, sino solo crea conocimiento producto de percibir un objeto. En otras palabras, gracias a la inferencia es que podemos extender los números, pero dicha inferencia -en el caso de las operaciones aritméticas- es producto de la intuición derivada.

En la cuarta parte de este capítulo vimos a Rogelio Rovira. Hicimos un análisis en tres partes, la primera trató sobre el signo “+” que equivale a la conjunción copulativa “y”. Para nosotros en contraposición de Rovira, la suma vale tanto como mera “reunión” (*Vereinigung*) o “composición” (*Zusammensetzung*) de dos números. Al mismo tiempo, el signo “+” representa la operación aritmética de la suma, es decir, la “adición” (*Addition*) de los números, porque la adición no es más que el total de la composición o la reunión de dos números o más. En consecuencia, no podemos desligar la composición y reunión de la adición como lo hace Rovira.

De otro lado, no podemos mezclar 7 + 5 = 12 con 24 : 2 = 12 o de 3 · 4 = 12 ni tampoco si lo quieren 17 - 5 = 12 como lo hace Rovira, porque todas las operaciones antes señaladas, pese a arrojar el mismo resultado, no se les puede equiparar. Nunca se aprende primero a dividir o a multiplicar o a restar, lo que se aprende primero es a sumar, y con números pequeños, para así proceder después con números grandes. Por lo cual, el número es el resultado de otras operaciones aritméticas, pero siempre y cuando se tenga en cuenta el proceder y el orden de aprendizaje de las diferentes operaciones aritméticas.

Segundo, es muy desconcertante atacar el juicio kantiano por una cuestión de tipo semántico. Yendo más allá de esto, cuando Kant piensa en 7 + 5 = 12, no es un juicio sintético y tampoco un juicio analítico, y dice que ello es un juicio sintético a priori, es porque primero interactúa la razón y los sentidos en el aprender humano en este tipo de operaciones. Por lo cual, el decir "es" representa un "nos da" o "tenemos". La universalidad y necesidad, característica del juicio analítico, se proyecta en la suma debido a que se cumple siempre en cualquier parte dicho resultado y porque el juicio es extensivo. El resultado de la suma nos dice algo más de lo que nos dice los dos números sumados (o también tres o más números sumados).

Tercero, que Kant se refiera al 7, al 5 y al 12 algunas veces como conceptos, representaciones y otras veces como números y no asumir el porqué es un poco injusto por parte del examinador Rovira. Si pensamos o hablamos de un número, hablamos de una representación de objeto concreto o abstracto, y, si lo vemos como tal, es una conceptualización. En consecuencia, cuando hablamos de número, proyectamos una representación en él y, al hacerlo, trae como resultado precisamente el trabajar con un concepto.

Por último, plantea tres problemas. ¿Qué es propiamente sumar? ¿En qué consiste la igualdad numérica? ¿Qué es el número? Las preguntas son interesantes, pero salen del enfoque kantiano. El saber con plenitud lo que es un número implica llegar a conocer el noúmeno, pero en la filosofía de Kant solo se conoce el fenómeno, es decir, las apariencias. La suma en nuestra vida cotidiana y en la matemática clásica seguirá siendo la misma, 7 + 5 la suma, adición o reunión de ello, seguirá siendo 12. La igualdad seguirá asumiéndose como la equiparidad entre dos cantidades de números u otras. Pero lo más importante es que las operaciones aritméticas son construcciones por parte del sujeto, construcciones del descubrimiento y la forma del conocer del mismo. Si no fuese de ese modo, no tendríamos ni hubiéramos tenido la posibilidad del desarrollo mismo de las operaciones aritméticas.

De lo expuesto tenemos que remarcar el siguiente balance: los autores en mención no distinguen por qué Kant le da más preferencia a los números naturales en su análisis, y a la primera operación aritmética, la suma. Varias de sus ideas de estos autores circundan bajo los conceptos de Kant, algunos con mucha precisión, pero sin tomar en cuenta la misma historia de la aritmética, por lo cual, la intención de nuestros primeros capítulos fue sentar las bases para luego tener el camino libre y así tomar partida de las diferentes posiciones de los diferentes autores que han escrito y/o polemizado sobre la filosofía de la aritmética de Kant en la actualidad. Hemos expuesto sus ideas con el fin de ver sus limitaciones y dar acuse de lo problemático que es no tomar los inicios de la aritmética que cuadran perfectamente con la conceptualización de la propia filosofía trascendental.

CONCLUSIONES

1.- Los juicios sintéticos a priori en la aritmética de Kant son viables de explicación en la realidad si se toma en cuenta que el ser humano no conoce, ni bajo la mera experiencia ni bajo la mera razón. Ambas cosas acompañan al conocimiento humano. En consecuencia, si el ser humano conoce mediante los sentidos y la razón, lo que exprese de dicho conocimiento serán juicios sintéticos a priori como producto de la mezcla a la hora de descubrir y construir conocimiento.

2.- La historia de la matemática nos dice que la primera operación aritmética es la suma y que después de la misma empezaron a conocerse las demás. Asimismo, los primeros números que se dieron a conocer en la historia fueron los números naturales, pero la necesidad de restar con total libertad hizo al sujeto conocer los números enteros negativos, las fracciones hasta descubrir los números irracionales. De esta historia podemos derivar en lo siguiente, que la suma se dio bajo el dar cuenta de nuestros propios sentidos y fue nuestra razón quien iba procesando dicha información. Pero, si todo partió de la suma, y por lo consiguiente de los números naturales, y el conocimiento de los mismos fue mediante los sentidos y la razón, en consecuencia, toda operación surgida después y todo número dado después tuvo un punto de partida, que son los números naturales. Por lo cual, no se parte de la nada, sino de algo que ya tenemos, y todo lo que viene después viene en descubrimiento y construcción del saber, en este caso del desarrollo propio del saber de la aritmética.

3.- Las opiniones sobre la filosofía de la aritmética de Kant son diversas a lo largo de la historia, por ello no cabe duda la cantidad de agua que ha circulado a lo largo de los años. Nuestro análisis de los últimos trece años nos hace dar cuenta que solo se toma de la filosofía de la aritmética de Kant la construcción que este mismo hace y expone. Empero, no se toma en cuenta la propia historia de la aritmética, ni el modo cómo el sujeto estuvo al frente del conocimiento, descubriéndolo y construyéndolo al mismo tiempo.

4.- El análisis de los críticos neokantianos en estas épocas ha sido un tanto incompleto, pues no distinguen por qué Kant le da más preferencia a los números naturales en su análisis, y a la primera operación aritmética, la suma. Nuestro análisis no solo reconstruye la filosofía de la aritmética de Kant, sino también la historia misma de la aritmética en su forma más sucinta de la aparición de las operaciones aritméticas y los números en general. Sentado esto, nuestra óptica es que la vigencia de la filosofía kantiana, en cuanto a los juicios sintéticos a priori, en la aritmética tiene su razón de ser en el lícito enrolamiento de sus conceptos de acuerdo a los de la historia misma de la aritmética.

Así pues, si no tomamos en cuenta por qué Kant fue tan “sencillo” al proponer ejemplos como los de la suma misma y trabajó siempre con los números naturales, es decir, si no tomamos en cuenta por qué Kant procedió bajo los inicios de la aritmética misma, no entenderemos cuáles son las bases para hablar de que en la aritmética existen juicios sintéticos a priori al modo como lo expone la filosofía trascendental.

BIBLIOGRAFÍA

ANDERSON, R. Lanier. *It adds up after all: Kant's philosophy of arithmetic in light of the traditional logic.* Philosophy and phenomenological research. Vol. 69, N. 3. Brown University. Rhode Island, 2004.

BOYER, Carl B. Historia de la matemática. Versión española de Mariano Martínez Pérez. Alianza editorial. Madrid. 1987

BRITTAN, Gordon. *Kant's theory of science*. Princeton University Press. New Jersey, 1978.

BRUNSCHVICCG, Leon. *Las etapas de la filosofía matemática*. Trad. Atora Ratto de Sadoski. Ediciones Lautauro. Buenos Aires. 1945

CASSIRER, Ernest. *Kant, vida y doctrina*. Trad. Wenceslao Roses. Fondo de Cultura Económica. México D.F., 1993.

--- *El problema del conocimiento.* I, II, México, Fondo de Cultura Económica. 1956.

COLOMER, Eusebi. *El pensamiento alemán de Kant a Heidegger. T.I. La filosofía trascendental: Kant.* Editorial Herder. Barcelona, 1986.

DELEUZE, Guilles. *La filosofía crítica de Kant.* Trad. Marco Aureliano Galmarini. Ediciones Cátedra. Madrid, 1997.

DELEUZE, Guilles. *La philosophie critique de Kant*. 3ª. Edición. Presses Universitaires de France. Paris, 2004.

DE VLEESCHAUER, H. *La evolución del pensamiento kantiano.* UNAM. México, 1939.

ENGELHARD, Kristina (y) MITTELSTAEDT, Peter. *Kant's theory of arithmetic: A Constructive approach?* Journal for General philosophy of science. Vol. 39, N. 2. Springer Netherlands, Dordrecht, 2008.

FESTINI, Nelly. *La imaginación en la teoría kantiana del conocimiento.* UNMSM. Lima, 1946. (Tesis doctoral)

GOTTFRIED, Martin. *Kant ontología y epistemología*. Trad. de Luis Felipe Carrer y Andrés R. Raggio. Facultad de filosofía y humanidades, Universidad nacional de Córdova. Córdova, 1961.

GUYER, Paul. Ed. *Kant and modern philosophy*. Cambridge University Press, New York; 2006

HACYAN, Shahen. *Física y metafísica del espacio y el tiempo. Filosofía en el laboratorio.* F.C.E. México D.F., 2004.

HANNA, Robert. *Mathematics for Humans: Kant's Philosophy of arithmetic revisited*. European journal of philosophy. Vol. 10, N. 3. Wiley-Blackwell. New Jersey, 2002.

HEIDEGGER, Martin. *Kant y el problema de la metafísica.* Trad. Gred Ibscher Roth revisada por Elsa Cecilia Frost. F.C.E. México, 1954.

KANT, Immanuel. *Antropología en sentido pragmático.* Trad. José Gaos. Alianza editorial. Madrid, 2004a.

--- *Carta a Johann Schultz del 25 de noviembre de 1788*. Trad. de Rogelio Rovira. Logos. Anales del Seminario de metafísica. Vol. 37. S/N. Universidad Complutense de Madrid. Madrid, 2004b.

--- *Correspondence.* Translated and edited by Arnulf Zweig. Cambridge University Press, New York; 1999a.

--- *Critica de la razón pura.* Pról. Trad. notas e índices de Pedro Ribas. Taurus. México D.F., 2008.

--- *Critica de la razón pura.* Trad. De Mario Caimi. Edición bilingüe alemán-español. F. C. E. México D.F., 2009.

--- *Lógica*. Trad. prólogo y notas de Carlos Correas. Ediciones Corregidor. Buenos Aires, 2010a.

--- *Nueva crítica de la razón pura. Por qué no es inútil una nueva crítica de la razón pura.* (Respuestas a Johann August Eberhard). Editorial Sarpe. Madrid, 1984.

--- *Prolegómenos a toda metafísica futura que haya de poder presentarse como ciencia*. Trad. comentario y notas de Mario Caimi epílogo de Norbert Hinske. Edición bilingüe. Ediciones Istmo, S. A., 1999b.

--- *Prolegómenos a toda metafísica del porvenir que haya de poder presentarse como una ciencia.* Trad. Julián Besteiro. Revisión y notas de José Luis Villacañas Berlanga. Editorial Gredos. Madrid, 2010b.

--- *Transición de los principios metafísicos de la ciencia natural a la física. (Opus Postumum)* Edición de Félix Duque. Editorial Anthropos. Madrid; 1991.

KITCHER, Philip. *Kant and the foundations of mathematics*. The philosophical review. Vol. 84, N. 1. Duke University Press. North Carolina, 1975.

LLANO, Alejandro. *Fenómeno y trascendencia en Kant.* Ediciones Universidad de Navarra S.A. Pamplona, 1973.

MARECHAL, J. *El punto de partida de la metafísica.* Tomo III y IV. Editorial Gredos. Madrid, 1959.

MOULINES, C. Ulises. *Exploraciones Metacientíficas*. Alianza Editorial. Madrid, 1982.

NERI CASTAÑADA, Héctor. *7 + 5 = 12 as a synthetic proposition*. Philosophy and phenomenological research. Vol. XXI, N.2. Brown University. Rhode Island, 1960.

PARELLADA, Ricardo. *Kant y la geometría*. En: TERUEL, Pedro Jesús (ed.). *Kant y las ciencias*. Editorial Biblioteca Nueva. Madrid, 2011.

PELLERTIER, Jean-Louis. Etapas de la matemática. Trad. Rosario Vera. Editorial Losada. Buenos Aires. 1958

POSY, Carl J (ed.). *Kant's philosophy of mathematics*. Modern Essays. Kluwer academic publishers. London, 1992.

RABADE, Sergio. *Problemas gnoseológicos de La Crítica de la Razón Pura.* Editorial Cincel. Madrid, 1987.

RABADE, Sergio, et. al. *Kant conocimiento y racionalidad. El uso práctico de la razón,* Editorial Cincel. Madrid, 1987.

ROVIRA, Rogelio. *¿Es 7 + 5 = 12 un juicio sintético? Examen de las razones de Kant (y de Schultz)*. En: TERUEL, Pedro Jesús (ed.). *Kant y las ciencias*. Editorial Biblioteca Nueva. Madrid, 2011.

SILVA SANTISTEBAN, Mario. *Aritmética*. Editorial San Marcos. Lima. 2000.

STEWART, Ian. *Historia de las matemáticas*. *En los últimos 10. 000 años*. Editorial Crítica. Barcelona. 2008.

STRAWSON, Peter. *Los límites del sentido. Ensayo sobre La Crítica de la Razón Pura de Kant.* Trad. Carlos Thiebaut Luis-André. Revista de occidente, S.A. Madrid, 1985.

STRAWSON, Peter. *The bounds of sense. An essay on Kant's critique of pure reason. Routledge*. New York, 2006.

SUTHERLAND, Daniel. *Kant on Arithmetic, Algebra, and the Theory of Proportions. Journal of the History of Philosophy*. Vol. 44, N. 4. The Johns Hopkins University Press. Baltimore. 2006.

VERNEAUX, R. *Immanuel Kant: Crítica de la Razón Pura.* Trad. Manuel Olasagasti. Editorial magisterio español S.A. Madrid, 1978.

VILLACAÑAS, José. *Racionalidad crítica. Introducción a la filosofía de Kant.* Editorial Tecnos. Madrid, 1987.

YOUNG, J. Michael. *Kant on the construction of arithmetic concepts.* Kant-Studien. Año 73 N° 1. Walter de Gruyter. New York, 1982.